

فلسفة الرياضيات

الدكتور محمد ثابت الفندي
الأستاذ بجامعة الإسكندرية

١٩٨٧

دار المعرفة الجامعية
٤. شارع سوئير - الإسكندرية

فلسفة الرياضيات

الدكتور محمد ثابت الفندي
الأستاذ بجامعة الإسكندرية

١٩٨٧

دار المعرفة الجامعية
٤٠ شارع بورس - الإسكندرية

الوقت ذكرا

إلى طلابي بجامعة بيروت العربية
أهدي هذه الدراسة
م. ث. الفندي

الفترة

بسم الله الرحمن الرحيم
وبه نستعين

والصلاة والسلام على سيد المرسلين .

وبعد فهذه فيما أعلم أول دراسة بالعربية في موضوع جليل شغل الفكر الغربي طويلاً وما زال يشغله وهو موضوع « أسس الرياضة » على حد اصطلاح الرياضيين أو « فلسفة الرياضة » كما اصطلاح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين .

والكتب الغربية الكثيرة في هذا الموضوع تعاني إما من السطحية وإما من التعقيد الفني . والعرض السطحي يشوه ولا ريب المسألة العلمية ويفقدها قيمتها . أما التعقيد الفني فأمر بهم الرياضيين . ولذلك فإن هذه الدراسة التي أخص بها الفلاسفة قبل غيرهم كان لابد أن تتحاشى الجوانب الفنية البحتة كما يعرضها الرياضيون في أبحاثهم ، وكان لابد أن توطئ المسائل على النحو الذي اتبعته هنا .

فإلى قراء الفكر المعاصر أقدم هذه الخلاصة في فلسفة الرياضة .

الدكتور محمد ثابت الفندي

الفصل الأول

تمهيد في فلسفة العلوم

(١) الصلة بين العلوم والفلسفة . (٢) حركات النقد الذاتي في العلوم وفلسفة العلوم . (٣) المنهج الذي اتبعناه في عرض فلسفة الرياضة .

— (١) —

هناك دائماً صلة وثيقة بين العلوم والفلسفة : وفي الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الحكمة أو الفلسفة لم تكن الصلة صلة جزء بكل فحسب وإنما كانت فوق هذا صلة اهتمام من الفلسفة الأولى بتحليل أو تبرير المبادئ والمسلّمات التي تقوم عليها العلوم .

وفي الفكر الحديث بعد أن استقلت العلوم شيئاً فشيئاً عن أمها الفلسفة ظلت تلك الصلة قائمة ولو من طرف واحد ، أعني من جهة الفلسفة وحدها التي عيّنت في نطاق اهتماماتها المنطقية بالتعرف إلى مناهج العلوم أو طرائق التفكير التي كفلت للعلوم تقدماً مطرداً بعيداً عن الفلسفة وطرقها ومنطقها . فنشأ بذلك في أحضان الفلسفة فرع من الدراسات المنطقية غير مسبوق سمي مناهج العلوم (Methodology) .

وفي الفكر المعاصر تجاوزت الصلة بين العلوم والفلسفة تلك الحدود الضيقة التي عبرت عنها فكرة مناهج العلوم .

فلقد نشأت في العلوم نفسها وخاصة المتقدمة منها حركات نقد ذاتي لبنائها العلمي من داخله لاختبار الأفكار والمبادئ أو الأسس التي يقوم عليها البناء وبيان الارتباط بينها وبين قضايا العلم ونظرياته المشتقة منها . فقدمت بذلك العلوم نفسها المشاكل التي تواجهها والموضوعات التي تثيرها ، الى الفلسفة التي وظيفتها الدائمة أيضاً نقد المعرفة المتكوّنة في أنساق علمية بتحليل البناء العلمي للوقوف على حقيقة الأسس التي يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها . فظهر بذلك مرتبطاً بحركات نقدية في العلم ما يسمى اليوم « فلسفة العلوم » Philosophy of Sciences التي هي الآن ملتقى الباحثين من المعسكرين العلمي والفلسفي ومجال التعاون المشترك بين العلماء والفلاسفة ، وتقهقرت تبعاً لذلك عبارة مناهج العلوم فلم تعد تظهر إلا في الكتب الطلابية . وربما أصبح استعمالها اليوم بالنسبة إلى العلوم المتقدمة لا مضمون له لأنها توهم بدراسة الطرق التي يمارسها العلماء فعلاً في علومهم المختلفة وهذا بالطبع لا يفيد العلماء أنفسهم شيئاً جديداً لم يكونوا على علم به من قبل ، كما لا يفيد الفلاسفة من حيث أنهم يرفضون قطعاً أن تكون الفلسفة علماً على غرار تلك العلوم أو أن تتخذ طرقها ، إذ الأمر الهام في هذه الفلسفة ليس البحث عن منهج علمي يحتذى أو يفرض وإنما تحليل البناء العلمي القائم فعلاً إلى عناصره وأساسه ونقد هذه الأسس لبناء ما لا ضرورة له وتكوين الحقيقة العلمية في نطاق حقائق المعرفة الانسانية .

ولا شك أن فلسفة العلوم تتضمن حتماً الإشارة إلى المناهج العلمية ولكن ما تتضمنه بالأصالة هو الإشارة إلى حركات نقدية هامة تمير الفكر

المعاصر في العلوم القائمة فعلاً عند العلماء أنفسهم للأسس والمبادئ التي تقوم عليها علومهم وإعسادة النظر فيها من جديد بالتحليل وبالضبط المنطقي في ضوء حاجات جديدة للعلم ذاته ، كما تتضمن بالضرورة فوق هذا الإشارة الى مضامين فلسفية بحتة سواء عند الفلاسفة أو عند العلماء وذلك عندما ينتهي البحث الى تحديد طبيعة « الحقيقة » التي يصل اليها العلم وقيمتها وصلتها بغيرها من الحقائق في نطاق نظرية للمعرفة .

- (٢) -

وكما قلنا قد هيأت حركات النقد التي حدثت في داخل بعض العلوم المتقدمة ومن قبل العلماء انفسهم (في الرياضيات والطبيعات) الى نشأة فلسفة العلوم اصطلاحاً وموضوعاً .

ولقد كانت فلسفة التاريخ أسبق فلسفات العلوم ظهر ورأ وانتعاشاً منذ أوائل القرن التاسع عشر رغم حداثة دخول علم التاريخ المرحلة العلمية التي نقلته من معرفة أدبية بقصد العظة والاعتبار الى علم يدخل الدراسات الجامعة بقصد فهم الأحداث وتفسيرها بأسبابها الحقيقية . فلقد ظهرت فلسفة التاريخ عند هيغل Hegel في المانيا كمحاولة لتجاوز أحداث التاريخ الغزيرة المختلطة إلى فهم لمنطق العقل الذي أنتجها وهو منطق الجدول الذي ينتقل من النقيض إلى نقيضه ثم إلى مايؤلف بين النقيضين . وتلميذه ماركس رغم قبوله لهذا المنطق لم يقبله جدلاً بين أفكار مجردة للعقل وإنما بين عوامل اقتصادية بحتة ومن ثم جاء الفهم المادي للتاريخ . أما عند معاصريهما الفرنسي أوجست كونت Comte فقد تبلورت نظريته الفلسفية للتاريخ في علم

جديد أذ اقترح أنه يجب أن يوجد علم الاجتماع الذي عليه أن يبدأ بإثبات وقائع خاصة بحياة الإنسان (وهذا هو عمل التاريخ) كما عليه أن يكتشف العلاقات السببية بين تلك الوقائع أي القوانين الاجتماعية (وهذا عمل علم الاجتماع) وبذلك يبدو أن عالم الاجتماع يرفع التاريخ إلى مرتبة علم بأن يفكر علمياً في نفس الوقائع التي يتناولها المؤرخ تجريبياً وذلك بربطها بقوانين.

لكن فلسفة التاريخ في القرن العشرين ابتعدت كثيراً عن تلك الأنظار الميتافيزيقية البحتة وأصبحت أكثر وعياً بمشاكل علم التاريخ كعلم وأكثر مقدرة على نقده وتحليله عند أمثال كروتشه Croco في إيطاليا وكولنجوود Collingwood في إنجلترا ودلتاي Dilthey في ألمانيا .

أما فلسفة الطبيعيات أو فلسفة العلوم الطبيعية (Philosophy of Physical sc. أو Philos. of Natural Sciences) فهي آخر فلسفات العلوم ظهوراً في القرن العشرين رغم أن الاصطلاح نفسه يرجع إلى نيوتن في القرن الثامن عشر حيث كان عنواناً لكتابه في الطبيعيات . وفي الواقع كانت الطبيعيات إلى السنوات الأولى من القرن العشرين واثقة تماماً من خطواتها التي قطعتها مدى قرنين وكان يظن أن اكتشافاتها الهامة قد تمت وأن تقدمها المرتقب بعد ذلك إنما كان في المزيد من الدقة في قوانينها القائمة ، أو على حد تعبير مؤلف أمريكي : « كان في المزيد من دقتها حتى الكسر العشري الرابع بدلاً من الكسر العشري الثالث » . ولكن في العشرينيات من هذا القرن ظهرت نظرية النسبية فتعرضت معها الطبيعيات الكلاسيكية إلى هزة عنيفة دخلت بها ومعها مرحلة النقد الدائى لأسسها ومبادئها وتصوراتها الجوهرية ، وبالتالي اتجهت وجهة فلسفية أكثر منها علمية تبرر إسهام الفلسفة في نفس المسائل التي أثارها الاتجاه الجديد ، ذلك لأن المسائل التي أثارها

النقد الداخلي للطبيعات مسائل ذات طبيعة فلسفية عريقة : ما طبيعة الزمان وما طبيعة المكان وما الحركة ؟ كيف يمكن أن تطبق التصورات الهندسية ؟ كيف يصح أن يكون الزمان بعداً رابعاً ؟ إن عالم الطبيعة الذي يتخذ موقفاً نقدياً من علمه القائم، ويحلل المبادئ والأسس تحليلًا نقدياً ليجيب على مثل هذه المسائل الفلسفية ، يتوقف بالضرورة عن أن يكون عالماً بالطبيعة وحسب إذ يصبح كذلك فيلسوفاً فيلسف أو يقوم علمه، ويسهم معه الفيلسوف في مناقشة وتحليل تلك المسائل الفلسفية العريقة في قدمها عند الفلاسفة .

ولقد انتعشت فلسفة الطبيعات بعد ذلك إلى درجة أكبر منذ ظهور الطبيعات الذرية وما أدت إليه من تساؤلات فلسفية وعلمية متشعبة يمس بعضها الأساس الذي يقوم عليه العلم كله وهو هل هناك في عالم الذرة حتمية مطلقة أم يتسع الأمر إلى قبول نوع من الحرية ؟

أما الرياضيات فقد سبقت إليها الحركة النقدية منذ أوائل القرن الماضي عند الرياضيين أنفسهم وهي مستمرة حتى اليوم .

حقيقة إنه لا يوجد علم أكثر عراقة في تاريخه من الرياضة . فقد دخلت الرياضة مرحلة اليقين العلمي منذ أقدم المفكرين الذين حفظ لنا التاريخ اسماءهم : طاليس وفيثاغور . كما أنه لا يوجد علم انحدر إلينا عبر القرون كبناء وثيق شاهد بالعبقرية العلمية للإنسان مثل هندسة الرياضي الاسكندرّي أقليدس . ولكن بعد ثلاثة وعشرين قرناً من الثبات والتقدم ظهر هندسيون من أمثال ريمان (Reimann) ولوبتشفسكي (Lobachevski) في القرن الماضي وغيرهما من الرياضيين الذين كانوا ينقبون في أسس علمهم وقواعده التي يقوم عليها فشعرت بفضولهم الرياضيات فجأة بحاجة إلى نقد ذاتي لتقصي أسسها وأصولها التي تقوم عليها طوال القرون عندما تبين هؤلاء الرياضيون إمكان هندسات أخرى عديدة

كل واحدة منها متسقة القضايا أو النظريات ومخالفة لغيرها ، كما تختلف جميعاً عن الهندسة الموروثة عن أقليدس ، وبدا فوق هذا أن بعض تلك الهندسات الجديدة أكثر قرباً من الواقع الكروي لكونها من الهندسة التقليدية ، وأن الكثير منها واسع التطبيق أيضاً . كل هذا إنما تبين بتحليل البناء الهندسي التقليدي للوصول إلى أسسه ومسلماته ثم بتغيير الأسس والمسلمات تغييراً يؤدي إلى قيام هندسات أخرى مغايرة ، كما تبين كذلك أنه لكي يقوم علم هندسي وثيق يجب الابتعاد بالمسلمات عن كل الأشكال المكانية والاكتفاء بإحالتها إلى المنطق الصوري وحده حتى لم تعد الهندسة نظراً في أشكال هندسية وإنما فقط في علاقات منطقية بحتة . كل هذا النقد الباطني القائم على تحليل البناء الرياضي بما فيه المسلمات إنما عرف عند الرياضيين بمسألة « أسس الرياضيات » (Foundation of Mathematics) بينما تسمى المسألة نفسها عند الفلاسفة والكثيرين من الرياضيين أيضاً « فلسفة الرياضيات » (Philosophy of Mathem .) لأنه واضح الآن أن أولئك الرياضيين الباحثين في الأسس والأصول إنما يفلسفون وأنهم بالتجأهم فوق هذا إلى المنطق الصوري الذي هو لباب الفلسفة وجوهرها إنما التقوا مع الفلاسفة المهتمين بنقد المعرفة العلمية عن طريق تحليل البناء العلمي إلى عناصره وأأسسه لتحديد طبيعة تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا ونظريات مشتقة منها على أساس المنطق وحده وحسب : فتساءل حينئذ الفلاسفة : أهى كلها قضايا من طبيعة المنطق الصوري أم أنها لا تمت إلى هذا المنطق بصلة وإنما تستقي من منابع تجريبية تعرف عند الرياضيين باسم « الحدس » ، ثم ما هو معنى « الحقيقة » في الرياضيات وما قيمة الحقائق الرياضية؟ هكذا نجد أن فلسفة الرياضيات اليوم ملتقى أبحاث الرياضيين والفلاسفة معاً وأكبر مظهر من مظاهر التعاون المثمر بين العلم والفلسفة .

ولقد انعقد أول مؤتمر دولي لفلسفة العلوم وتحت هذا الاسم في باريس سنة ١٩٣٥ وتعاقبت بعده مؤتمرات أخرى. كذلك ظهرت في برامج الجامعات دراسات تحت هذا الاسم ، كما ظهرت مجلات عديدة تحمله ^(١) . وفي كل الأحوال ينصب البحث فيها على الرياضيات والطبيعات بصفة خاصة وإن كان يصح أن يمتد ليشمل علوم الأحياء والتاريخ والعلوم الإنسانية الأخرى .

أما المسائل التي تعالج في فلسفة العلوم فأمر مختلف فيه أشد اختلافه ، ولقد ذكرنا أمثلة سريعة لمضمون هذه الفلسفة في التاريخ والطبيعات والرياضيات . ولكن يمكن الإشارة إلى ما يأتي من الموضوعات .

أولاً : موضوعات ذات طابع منطقي صرف . وهي إما موضوعات من المنطق الرمزي نفسه أو أبحاث في التعريفات والقضايا الخاصة بعلم ما مع تحليلها تحليلًا رمزيًا (أي بواسطة رموز المنطق الرياضي) بقصد اشتقاق الحدود المعرفة بعضها من بعض وبرهان القضايا أو النظريات على أساس المسلمات .

ثانياً : موضوعات ذات طابع فني علمي : وهي بالنسبة إلى الرياضة كالبحت في أسس (Foundation) البناء الرياضي كله أو أسس أية نظرية رياضية منفردة لاستقصاء الأصول والمسلمات ، أو كالبحت في معالجة نقائص الرياضة . أما بالنسبة إلى الطبيعات فكالبحت في الأفكار الأساسية

-
- ١) المجلات الآتية : (بليهور بامريكا) 1. *Philosophy of Science*
 - (جوتنبرج بألمانيا) 2. *Theoria*
 - (اكسفورد بإنجلترا) 3. *Analysis*
 - (ليبج بألمانيا) 4. *Erkenntnis*

التي تستند اليها ، مثل أفكار الزمان والمكان والحركة والضوء والسرعة والذرة وبالجملة كل الثوابت في الطبيعيات الرياضية .

ثالثاً : موضوعات ذات طابع منهجي (أي خاص بمناهج كل علم على حدة) : ففيما يختص بالرياضيات يتناول البحث كيفية إقامة ما يسمى النسق الاستنباطي Deductive System كما يتناول بحث الشروط المنطقية لاختيار المسلمات ، وفيما يختص بالطبيعيات يتناول البحث مشكلة الاستقراء من جوانبها المختلفة .

رابعاً : موضوعات ذات طابع فلسفي ومثلها المواقف الفلسفية الأساسية التي يقفها الباحث حيال حقائق علم ما من العلوم . ففيما يختص بالرياضة مثلاً نجد في الوقت الراهن ثلاثة مواقف أساسية تتنازع الأمر فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة وهي : موقف المناطقة الذين يرون في قضايا الرياضة مجرد قضايا من المنطق الصوري وحسب ، ثم موقف الأكسيوماتيين الذين يرون أن المنطق والرياضة نابعان سوياً من أصل آخر قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية ، ثم أخيراً موقف الحدسيين الذين يرفضون الموقفين السابقين ويؤكدون أن الحقائق الرياضية لاصلة لها بالمنطق وأنها تابعة من نوع خاص من التجربة الفكرية يسمى « الحدس الرياضي » . أما فيما يختص بالطبيعيات فيدور البحث حول تحديد أفكار كالعلية والحتمية والقرص والقانون والاحتمال وما قارب هذه المسائل التي تلتقي كلها في تقويم للقوانين العلمية وهل هي حقائق ضرورية أم اتفاقات عابرة من صنع العلماء أم غير ذلك من المواقف الفلسفية المعروفة حيال فكرة « الحقيقة » .

* * *

نريد الآن أن نحصر جوامع الكلم في فلسفة الرياضة كما سنقدمها في
الفصول القادمة .

ونحن لكي نستعرض موضوعاً معقداً كهذا له جوانبه الفنية البحتة
لا نريد أن نختط فيه غير خطة تاريخه هو نفسه وحسب ، فأوضح الطرق إليه
وأيسرها الالتزام بالمنهج التاريخي في تعقب ظهور المسائل وتطورها وحلها
واتجاهاتها عبر التاريخ الطويل للرياضة والفلسفة معاً . إلا أن منهجنا التاريخي
هو مع ذلك نقدي تحليلي في آن واحد ، بمعنى أننا نتوقف أمام كل مسألة تظهر
في التاريخ المشترك بين هذين العلمين ، لتفهم مغزاها ودورها الذي تؤديه
فوق مسرح فلسفة الرياضة بحيث يبدو في حقيقة الأمر أن البحث ليس
تاريخياً وحسب ، وإنما هو أيضاً نقد وتحليل للمواقف الفكرية الأساسية مع
تقويم للدور الذي يؤديه كل موقف منها . ومن ثم قسمنا خطواتنا في البحث
إلى المراحل الأربع الآتية :

في المرحلة الأولى نبدأ من تعريف تقليدي للرياضة بموضوعاتها (انظر
الفقرة ٤) ونحاول أن نتبع الأصول التي نشأت عنها تلك الموضوعات
فرفض الحلول المثالية والحسية والاجتماعية لفكرتي المكان والعدد (فقرة ٥)
ونبين أنه لا بد لنشأة موضوعات الرياضة من حضارة العلم والعقلية العلمية
مما توافر في بلاد اليونان القديمة لأول مرة في التاريخ ، وهكذا نشأت الرياضيات
منذ فيثاغورس واليه ينتسب الرياضيون القدماء الذين اهتموا ببرهان النظريات
متفرقة دون محاولة تنسيقها جميعاً في نسق علمي موحد (الفقرة ٦) أما تنسيقها
في علم موحد فيرجع الفضل فيه إلى رياضي من العصر الإسكندري هو
أقليدس الذي أفاد من تحليلات أرسطو الرائعة للأسس التي تستمد منها

الهندسة براهينها وهي التعريفات والأصول والمسلمات ، فكان هذا التحليل الأرسطي حجر الزاوية في البناء الرياضي الكبير الذي أقامه أقليدس طبقاً لذلك التحليل ، كما كانت المسائل التي أثارها المنهج المشترك بين أرسطو وأقليدس هي عين المسائل التي سيثيرها المحدثون بشأن الرياضة وأسسها (فقرة ٩) ..

وفي مرحلة ثانية نبدأ من تقسيم للرياضة إلى هندسة وتحليل ونبين في الهندسة في العصر الحديث على أفراد ونبين كيف أن محاولات الرياضيين الفاشلة برهان المسلمة الخامسة عند أقليدس بالإضافة إلى محاولاتهم قبول مسلمات بديلة لها تناقضها أسرع بظهور هندسات لا حصر لها في القرن التاسع عشر ، كما أسرع بحركة النقد الذاتي في الوقف عينه وعند الرياضيين أنفسهم لعلمهم ولأسسه ومسلماته (فقرة ١٠) مما أدى بهم في آخر المطاف إلى تصور جديد « للحقيقة » الرياضية التي لم تعد عندهم مطابقة للمسلمات للواقع وإنما فقط عدم تناقض مسلمات كل هندسة على حدة فيما بينها بغض النظر عن الواقع أو المكان لأنه لا واحدة من الهندسات أولى من غيرها بادعاء المطابقة (فقرة ١١) كما أدى بهم أيضاً إلى تقصي مسلمات كل هندسة على حدة وحصر النظريات المترتبة عليها ، وإلى الاقتصاد في عدد المسلمات وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن وهذا كله مما عرف آنذاك بمباحث تأسيس الهندسة أو « الأكسيوماتيك » وهي الحركة التي أسفرت آخر الأمر عن تجريد المسلمات عن كل المعاني الهندسية الدالة على أشكال وإحالتها تماماً إلى تصورات من المنطق الصوري وحده . وعند هذا الحد أصبح لازماً على المنطق الصوري أن يتطور أيضاً إلى علم رياضي (فقرة ١٢) كما أن اختيار طائفة من المسلمات لإقامة هندسة ما اتضح أنه يجب أن يخضع

إلى شروط منطقية معينة إذا لم تراخ تلك الشروط تناقضت المسلمات أو أدت إلى نظرية أخرى (فقرة ١٤) .

وفي مرحلة ثالثة من البحث نتناول الجبر والتحليل ونتصدى لحركة النقد الذاتي في التحليل التي انطلقت من اكتشاف دوال رياضية منفصلة أي لا تشهد « بالاتصال » أو الاستمرار وكان يظن ان الدوال كلها متصلة أي تجتاز قيماً عددية متتابة لا فجوات فيها وبذلك تعبر خطأ هندسياً متصلاً . فظهرت منذ ذلك الوقت في منتصف القرن الماضي حاجة ملحة عند الرياضيين إلى التخلي عن الحدس الهندسي برمته الذي يمثله في التحليل ذلك الاتصال (فقرة ١٦) فنبد الرياضيون فكرة الاتصال كأساس للتحليل واتجهوا إلى الأعداد الحسائية المعروفة يلتصقون فيها أساساً وثيقاً لعلم التحليل وأصبح هذا الاتجاه محتوماً منذ اكتشاف الأعداد التخيلية (فقرة ١٧) وهكذا بدأ الرياضيون يردون الرياضة كلها إلى الحساب الأولي المعروف وأصبح العدد الصحيح المقياس الوحيد لليقين الرياضي. وهذا ما عرف في تاريخ الرياضة في القرن الماضي بحركة « تحسب » (أن امكن التعبير) الرياضة أو « بالمذهب الحسابي » فردوا الأعداد التخيلية إلى العدد الصحيح (فقرة ١٨) كما ردوا إليه أنواع الأعداد جميعاً ومن أهمها الأعداد الصماء التي احتاجت إلى إحدى نظريتين : الحد أو القطع ، لكي ترد إلى الأعداد الصحيحة وربطوا الهندسة بواسطة الأعداد الصماء التي تشهد بالاتصال (أو بعملية متصلة) إلى الأعداد الصحيحة . فأصبحت الرياضة كلها قائمة على الأعداد الصحيحة وعملياتها واكتسبت الرياضة منها يقينها كذلك . وهكذا أضفى المذهب الحسابي على الرياضيات وحدة وتماسكاً ، وبقيناً مستمداً من يقين الأعداد (فقرة ١٩) . ثم ظهرت في نفس الوقت الذي نضج فيه المذهب الحسابي في الربع الأخير من القرن الماضي نظرية

المجاميع للرياضي جورج كانتور الذي اقتحم بها أمنع الحصون على الفكر البشري وأقدمها وهو حصن الأعداد اللامتناهية فوسع من أفق الحساب وأمد به عالم من أبدع ما اكتشف الإنسان ، وفي هذا كله دعم للمذهب الحسابي من خارجه ، وتأكيده بأن الأعداد كلها ، المنتهى منها واللامنتهى ، أساس كل شيء في الرياضة (الفقرة ٢٠) . وإذا كانت الكلمة الأخيرة في المذهب الحسابي هو أن الأعداد الصحيحة هي كل شيء في الرياضة فإن الرياضيين الباحثين في أسس علمهم بعد ذلك لم يقنعوا بمثل تلك النتيجة ورأوا أنه لكي تكتسب نظرية الأعداد نفسها كل ما هي جديرة به من يقين لابد من العودة إلى المنهج الرياضي التقليدي وهو إقامة الأعداد نفسها على « مسلمات » تنتجها ومن ثم محاولات كثيرة في أكسيوماتيك العدد . وقد استدعت هذه المحاولات تحليلاً منطقياً جديداً للأعداد نفسها لكي ترد إلى ثوابت المنطق الصوري ، كما احتاج المنطق الصوري نفسه إلى دفعة حاسمة جعلته علماً رياضياً بحتاً بحيث ينهض بتبعاته الجديدة من جهة استنباط الأعداد منه ، وكذلك للمساهمة في حل نقائص الرياضيات المعاصرة (فقرة ٢١) .

بقيت المرحلة الرابعة والأخيرة التي نستعرض فيها المذاهب المعاصرة في فلسفة الرياضة مجردة عن كل جوانبها الفنية البحتة التي لا تهم إلا الرياضيين وحدهم . ونتوقف طويلاً عند المذهب الأول منها وهو المذهب اللوجستي . وهو موقف أولئك الفلاسفة الذين رأوا إمكان قيام فلسفة علمية ، أي تتخذ منهج العلم ، وموضوعها متابعة تحليل الرياضة إلى أبعد ما وصلت إليه في المذهب الحسابي أو في حركة أكسيوماتيك العدد . فكان منهج هذه الفلسفة العلمية هو المنطق في أقوى وأحدث صوره الرياضية وهو ما يسمى اللوجستيقا ، أما موضوعها فهو اشتقاق العدد من ثوابت المنطق الجديد ومن وراء العدد

اشتقاق كل نظريات الرياضيات كما رتبها المذهب الحسابي (فقرة ٢٢) .
ولا بد أن نستعرض أول فروع الحساب في هذا المنطق وهو حساب
القضايا الأولية لكي نلمس عن قرب طبيعة هذه الآلة الفنية الجديدة التي
تستعملها الفلسفة العلمية في معالجة مشكلات العلم الرياضي (فقرة ٢٤)
ونتبين أيضاً الأسس المنطقية البحتة لذلك البناء اللوجستي الذي يجمع
المنطق والرياضة معاً في نسق موحد يتدرج فيه من المنطق إلى الرياضة
بحيث تبدو الرياضيات مشتقة من المنطق عن طريق العدد الذي انتهى إليه
المذهب الحسابي (فقرة ٢٥) . ثم نعالج بعد ذلك المذهب الأكسيوماتيكي
وهو الذي يرفض اشتقاق الرياضيات من المنطق ويقرر أن الرياضيات والمنطق
ينبعان متوازيين معاً من شيء قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (فقرة
٢٦) . ثم نختم باستعراض المذهب الحدسي الجديد الذي يرفض المذهبين
السابقين ويعود إلى فكرة الحدس أو تلك التجربة الفكرية المباشرة التي يألّفها
الرياضيون كمنبع أصيل ووحيد للرياضة (فقرة ٢٧) . ولا سبيل إلى
التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة
بأسس الرياضيات لأنه على حد تعبير الرياضي هنري بوانكاريه لا سبيل
إلى التوفيق بين المنطقيين والتجريبيين ، بين ذوي العقلية الكانتورية (نسبة
إلى جورج كانتور) التي تقبل أعداداً لا متناهية وذوي العقلية غير الكانتورية
التي لا تقبل إلا الأعداد المنتهية ، بين من سماهم وليم جيمس ذوي
العقول الرقيقة وذوي العقول الخشنة .

الفصل الثاني

موضوعات الرياضة ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديماً

- (٤) التعريف التقليدي بالرياضة بموضوعاتها . (٥) الأصول
الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتي المكان والعدد ، أو الهندسة والحساب
(٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين .

—(٤)—

تبدو الرياضيات الآن عند النظرة الأولى أنها تختلف تماماً عن غيرها
من العلوم كالطبيعيات وعلوم الأحياء مثلاً .

فهذه الأخيرة تستند إلى مشاهدات حسية وتجارب . وتحتاج إلى معاملة
علمية وآلات متفاوتة تعقيداً لكي تتكون وتنمو .

في حين أن الرياضيات تستعاض عن ذلك كله بالسبورة والطباشير أو
بالورق والقلم وحسب ، كما لو كانت تنبع كلها من رأس الرياضي . وهذا
ما عبرت عنه لوحة من القرن السابع عشر محفوظة بمتحف اللوفر صور فيها

فرديناند بول (Boll) الرياضي رجلاً ينظر إلى سبورة عليها أشكال وأعداد . كما عبرت عنه أيضاً فلسفات كبرى منذ إيلينق فقد ذهب افلاطون إلى أن موضوعات الرياضه أو على الأصح ماهيات الأشكال والأعداد ليست من عالم الحس المتغير وإنما هي مثل قائمة بلدواتها وثابته ، يتأملها الرياضي ويصدر عنها في علمه . وفي محاورته المسماة باسم في من أثرياء أثينا هو « مينون » نجد أن خادمه الذي لم يتلق علماً استطاع — بعد أن حاوره سقراط لتوليد الحقيقة أو المعرفة من ذهنه — أن يبرهن دون مشقة نظرية معقدة في الهندسة لأن تلك المحاوره أثارت في ذهنه ذكريات قديمة لمشاهدته السابقة في عالم علوي لتلك المثل الرياضه القائمة بلدواتها أبدأ .

وفي الواقع إن موضوعات الرياضه في صورتها التي يألها الرياضيون اليوم تبدو مجردة عن كل ما هو حسي وكأنها تنبع من الفكر وحده . فهي موضوعات لا تشير إلى الأشياء حتى تحتاج مقدماً في تكوينها واطراد نموها إلى تجربة سابقة وإلى معرفة بها ، وإنما هي تشير فحسب إلى الجانب الذي « يقاس » و « يعد » منها ، أعني أنها تتناول جانب الزيادة والنقصان والمساواة في الأشياء وهذا هو « القياس » كما تتناول جانب « الترتيب » أو « النظام » في تتابع الأشياء وتسلسلها وهذا هو « العدد » .

ومن ثم كان الموضوع الذي تنظر فيه الرياضه كما تراه الفلسفات موضوعاً مزدوجاً :

القياس والترتيب (Mesuro & Ordre) كما يقول ديكارت .

أو الكم والمقدار ، أو الكم المتصل والكم المنفصل كما تقول اصطلاحات أكثر قدماً عند فلاسفة كثيرين ، ترجع في أصولها إلى أرسطو .

ذلك هو الموضوع المزدوج للرياضة وبه تعرف عند الفلاسفة دائماً .

نلاحظ الآن في هذا الموضوع المزدوج أنهم يضعون في الطرف الأول من كل ثنائية من تلك الثنائيات موضوع الهندسة وفي الطرف الثاني موضوع الحساب . يقول مثلاً ابن سينا (في النجاة ص ٣٣٨) « والكم ينقسم إلى المتصل ... وإلى المنفصل ... ومن حيز الكم المتصل يتبدى الهندسة ويتشعب دونها التشجير والمساحة والأثقال والحيل . ومن حيز المنفصل يتبدى الحساب ثم يتشعب دونه الموسيقى وعلم الزيجات . ولا نظور لهذه العلوم الرياضية في ذوات شيء من الجواهر ولا في هذه الكميات من حيث هي في الجواهر » . وهو يعني بالفقرة الأخيرة أن الرياضيات لا تتناول الكم متصلاً أو منفصلاً من حيث هو متحقق في الأجسام وإنما من حيث أن الكم مجرد وخالص في نفسه عن كل جوهر يحل فيه .

-(٥)-

وواضح أن الكم والعدد كما يتناولهما العلم الرياضي أكثر الأمور العلمية تجريداً وبعداً عن الأشياء الحسية التي يعالجها علماء الطبيعة والاحياء بحيث يسهل على التأمل فيهما ، أو بالأحرى في أصولهما ومنابعهما ، أن يذهب مذهباً مثالياً كمذهب أفلاطون في القديم كما رأينا أو كمذهب الرياضيين الحديثين هرميت (Hermite) وكرونكر (Kronecker) .

ولكن مثل هذا المذهب في الأصول المثالية أو المتابع العقلية الصرفة للموضوعات الرياضية لم يكن مقبولاً دائماً عند المفكرين المهتمين بأصول هذه الموضوعات وخاصة بعد أن عرفت الكثير عن فزيولوجية الحواس كمنبع بعيد ومحتمل لهذه الموضوعات ، وبعد أن جمع علماء الاجتماع

وقائع كثيرة عن فكري المكان والزمان اللتين يُرد إليهما أحياناً الكم والعدد على الترتيب في بعض الفلسفات ، وذلك عندما تقصوا أصولهما البعيدة عند الشعوب القديمة وعند البدائيين ، وأخيراً بعد أن عرفنا كذلك الكثير عن تاريخ الرياضة وتطور موضوعاتها طوال تاريخها .

فكل هذه الدراسات الحديثة تضافرت في إلقاء أضواء متتامة على أصول متواضعة وتجريبية لأفكار مثل المكان والزمان والكم والعدد وغيرها ، وهذا لما يبطل كل نظرة مثالية في أصول الرياضة ومنابعها .

فلقد بين أرنست ماخ (Ernst Mach) في كتابه المعرفة والخطأ لأول مرة أن تلك الأفكار وليدة التكوين الفيزيولوجي للحواس الانسانية . فهناك أنواع — كما يقول — من الكم تختلف باختلاف الحواس كالكم البصري والكم اللمسي والكم الضغطي والكم السمعي وغير ذلك .

ويؤيد هذا الرأي أن فزيولوجية الحواس كشفت منذ أواخر القرن الماضي عن مثل تلك الحقائق وخاصة فيما يخص أصل فكرة المكان وذلك في التجارب المعروفة عند فبر (Weber) باسم ظاهرة تعيين المكان أو الموضع (Localisation) فوق سطح الجلد . فنحن نعلم الآن من تلك التجارب أن تطبيق طرفي برجل فبر فوق أية رقعة من سطح الجلد لا يحس باختلافهما كنطقتين متميزتين إلا إذا انفرجت زاوية البرجل انفراجاً كافياً بحيث إذا نقصت تلك الزاوية لم تميز النقطتان وبالتالي لم تدرك المسافة بينهما أي « المكان » كما نعلم كذلك أن لذلك الانفراج حداً أدنى يختلف كثيراً باختلاف مناطق الجلد فهو صغير جداً فوق أطراف الأنامل كبير نسبياً فوق الكتفين والفخذين مثلاً . ثم نعلم فوق هذا أن ذلك الإحساس بالمسافة (أو المكان أو الكم وكلها هنا مترادفة) إنما هو

نتيجة لانتشار جسيمات أو نهايات عصبية معينة تعرفها فزيولوجيا الحواس انتشاراً متفاوتاً فوق سطح الجلد فهي كثيفة في أطراف الأنامل قليلة في الظهر . وهذا كله يؤيد الرأي القائل بالأصول الفزيولوجية الممكنة لموضوعات الرياضة ضد المثاليين .

لكن في الحقيقة مهما تكن أهمية تلك الأصول الفزيولوجية الممكنة فإنها لا تعدو أن تكون مجرد أصول ذاتية وفردية لا تكون علماً مشتركاً بين الجميع ، ولذلك فإن علم الاجتماع يحاول أن يفسر هذا الاشتراك بين الناس فيذهب إلى أصول اجتماعية للأفكار الرياضية . فعلماء الاجتماع الذين تقصوا الشعوب البدائية يقولون إن اتفاق قبيلة ما في تصور مكان خاص بها ويعم أفرادها إنما له أسباب وأصول اجتماعية بحتة تلخصها عبارة « حاجات الحياة في الجماعة » . فتلك الحياة تفرض على أفراد القبيلة الانتقال للصيد وإلى مكان التوتم لاداء الشعائر الدينية وتفرض تقسيم الأرض وتعيين الجهات واتخاذ نقط ارتكاز (علامات) فوق التربة للانتقال . ومن ثم كان المكان القبلي مكان الأعمال اليومية التي يحتاج إليها البدائي .

وفي حدود تلك الأعمال المعبرة عن حاجات البدائي في مجتمعه يمكننا أن نتكلم عن التصور البدائي للمكان أو الكم ذلك التصور الذي يخلو تماماً من كل صفة نظرية ومجردة مما يمتاز به المكان العلمي فهو مكان ممتلئ بالأعمال والحركات التي تجري فيه وبالعناصر المشخصة للحياة اليومية . فالبدائي يعرف كل أجزاء مكانه اليومي معرفة حركية وعملية ولكن ينقصه للدهشة الشديدة التصور المجرد أو الإدراك العقلي الخالص عن الحركة والعمل لفكرة المكان . بحيث لو سألت بدائياً عما هو المكان مجرداً عن الأعمال والحركات أي عن المكان الذي يستعمله الرياضيون والهندسيون مثلاً فأننا

لا نجد عندهم للدهشة الشديدة المقدرة حتى على مجرد فهم السؤال . هذا ما يقوله علماء الاجتماع من أمثال دوركيم Durkheim وموس Mauss .

فلا بد إذن من فكر آخر غير الفكر البدائي ولا بد من حضارة أعلى من المجتمع البدائي كحضارة العلم لكي نصل إلى فكرة المكان ذي الأبعاد الثلاثة الحالية من الأعمال والحركات والأجسام ، التي هي موضوع الهندسة . ذلك لأن المكان الرياضي يمتاز بصفات هامة لا تقوى عليها العقلية البدائية فضلاً عن استحالة استمدادها من فزيولوجية الحواس . فهذا المكان هو مكان مستمر متصل (Continu) نستطيع أن نتقل فيه كيف شئنا دون فجوات فيه ، ثم إن أجزائه متشابهة أو متجانسة (Homogene) ولا كيف محدد لها (Isomorphe) كما إنه لا ينتهي (Infini) بعبارة أخرى لا تكفي الأصول الاجتماعية لإقامة المكان الذي يحتاج إليه علم الرياضة .

من جهة أخرى نستطيع أن نتبع نفس الخطوات السابقة في نشأة فكري الزمان والعدد . هما فكرتان متصلتان إحداها بالأخرى من حيث ان تتابع الأعداد ربما لم يكن يمكن تمييزه إلا نتيجة لتتابع آتات الزمن فيرجع العدد بذلك إلى الزمن .

أما الزمن نفسه فنستطيع أن نتبع أصوله في الحياة النفسية وتتابع أحوالها عند الفرد وهذا هو الأصل التجريبي للبحث لفكرة الزمان . ولكن هذا القول لا يكفي في إقامة علم على الزمان لأنه زمان فردي بحت . وهو لكي يكون عاماً يزعم الاجتماعيون أنه يكفي أن نتبع أصوله الاجتماعية . وفي الواقع نجد أن البدائين يقسمون زمنهم أو أوقاتهم إلى زمان طقوس وشعائر وإلى زمان عمل وصيد كما نجد تقسيماً آخر حسب معتقداتهم إلى زمان نحس فلا يعملون فيه شيئاً وإلى زمان حظ . فهنا زمان مشبع بالحياة البدائية ولا يستطيع

ان يؤدي الى علم رياضي اذ تحتاج الرياضة الى حضارة فكرية أعلى
هي حضارة العلم التي نستطيع فيها أن نجرد الزمان من كل هذه التقسيمات
البدائية العملية ونرقى الى زمان يمتاز كالمكان بصفات الاتصال والتجانس
والخلو من الأشياء والالنهاية .

وربما كانت فكرة العدد قربية في منابعها من فكرة الزمان فترجع مثلها
الى تتابع الحالات النفسية عند الفرد . ولكن مهما تكن أصولها التجريبية
هذه فهي لا تفسر لنا العدد في تجرده وعمومه كما هو في الرياضة . ولقد
وجد الاجتماعيون فكرة العدد في الشعوب البدائية في صورة يختلط فيها
العدد بالمعدود إلى حد يدهش المتحضر ، فان البدائي يستطيع من مجرد منظر
شيء ما أن يحدد عدده بينما يحتاج هذا من المتحضر الى مقابلة أجزاء ذلك الشيء
واحداً واحداً بسلسلة الأعداد . كما وجدوا أن بعض الشعوب البدائية لا
يعرف من سلسلة الأعداد غير الأعداد الثلاثة الأولى وبعد ذلك يطلقون
« كثير » للدلالة العددية . وهناك شعوب بدائية تطلق أسماء مختلفة على عدد
واحد بعينه تبعاً لاختلاف المعدودات . وهناك شعوب اتخذت العدد خمسة
أو العدد عشرين أو حتى العدد ستين بدلاً من العدد عشرة كأساس للحساب
العددي . كل هذا يشهد بأن فكرة العدد التي هي أكثر عمقاً من فكري المكان
والزمان احتاجت إلى تجريد عقلي وإلى حضارة علمية أعلى من حضارة
البدائي .

وفي ضوء هذا كله يتبين لنا أننا إذا رفضنا المذهب المثالي في أصول
الرياضة فان المذهبيين : الفزيولوجي والاجتماعي مهما ألقيا من ضوء على أصول
متواضعة لموضوعات الرياضة إلا أنهما لا يكفيان إطلاقاً في فهم حضارة العلم .
ولذلك ننتقل الآن إلى إلقاء نظرة في أصول الرياضيات من خلال تاريخ
نشأتها عند القدماء .

إن أقدم وثيقة عن الهندسة هي البردية المصرية المسماة باسم مكتشفها الألماني رند (Rhind) وهي عبارة عن مخطوطة كاتب الملك أحمس التي ترجع إلى ٣٥٠٠ سنة وتشتمل على وصفات عملية مختلفة في الرياضة لحل المشاكل اليومية لدى المصري القديم . وحاجة المصري القديم إلى إعادة مساحة أرضه عقب كل فيضان كما يلاحظ هيرودوت ، وإلى التعمير والبناء ، هي نقطة البدء في نشأة علم المساحة الذي هو علم الهندسة في مرحلته التجريبية ، والممهدة لها . من تلك الوصفات العملية التي لا نعلم بعد طريقة حسابها تقدير قدماء المصريين لمحيط الدائرة بستة عشر تسعاً من قطرها وهو تقدير تقريبي طبعاً . ومن تلك الوصفات أنهم توصلوا بالتقريب أيضاً إلى مساحة المثلث المتساوي الساقين والذي أضلاعه أ . أ . ب وذلك بضرب $\frac{1}{2}$ ب مقسوماً على اثنين مما يؤدي إلى نتيجة تقرب إلى الحقيقة كلما كان أ أكبر من ب . كما عرفوا عملياً كذلك أن المربع المقام على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في حالة واحدة فقط هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية على التوالي ثلاث وحدات وأربع وخمس . أعني أنهم عرفوا عملياً النظرية التي ستنسب فيما بعد إلى اليوناني فيثاغور ولكن في حالة واحدة بالذات هي الموصوفة آنفاً ولم يستطيعوا الارتفاع عنها إلى النظرية في عمومها .

كذلك لم يستطع قدماء الهنود أن يرتفعوا إلى النظرية في عمومها إذ عرفوها عملياً محصورة في حالة واحدة هي حين تكون أطوال أضلاع المثلث خمس وحدات واثنى عشرة وثلاث عشرة على التوالي .

وهكذا أدت الحاجات العملية كمساحة الأرض مثلاً بقداماء المصريين

وغيرهم كالهنود إلى السير في الطريق المؤدي إلى اكتشاف علم الهندسة عن طريق علم المساحة ولكن دون اكتشاف الهندسة ذاتها كعلم نظري له قضاياها ونظرياته العامة التي يبرهن على صدقها وعمومها في كل خطوة من خطواته .

اما الاكتشاف الحقيقي لعلمي الهندسة والحساب بنظريتهما وقوعدهما مع البرهان النظري على صدقها صدقاً يعم كل الحالات الجزئية فمن اسرار الحضارة اليونانية .

إن أرنست رينان E. Renan وهو من أئمة مفكري القرن الماضي ، في كتابه الطيب عن « مستقبل العلم » الذي يستفاد به في فهم الروح العلمية برغم نظراته الضيقة إلى العلم من خلال علم إنساني كالفيولوجيا (فقه اللغة) بدلاً من خلال علوم الطبيعة التي يمكن أن يكون لها مستقبل واضح ، إن أرنست رينان هذا لم يجد تفسيراً يبرر به ظهور العلم عند اليونانيين لأول مرة في تاريخ الانسانية كقضايا عامة يبرهن على صدقها إلا القول بأن ذلك هو « المعجزة اليونانية » . وهو يعني أن المعجزات اذا كانت من نوع ديني فمعجزة اليونانيين تأسيس العلم . ولقد أصبحت عبارة رينان هذه شائعة الآن بين المؤلفين الغربيين الذين يشاطرونه الرأي بأن العلم عند اليونان غير مسبوق في تاريخ غيرهم .

الواقع إن السر في قيام تلك المعجزة هو أدراك اليونانيين دون غيرهم من الشعوب القديمة لفكرة العلم كمحجة أو برهان على صدق قضية ما صدقاً عاماً أي في كل التطبيقات الجزئية التي تصادفها ، وذلك بدلاً من الاكتفاء بوصفات عملية وقواعد تقريبية غير أكيدة كما فعل قدماء المصريين . لقد كان اليونانيون ككل شعوب حوض البحر الأبيض المتوسط شعباً يحب الجدل والمناظرة . ولكنهم امتازوا بيئة سياسية لم تتح لغيرهم ، فيها تنافس شديد بين المدن التي تريد كل واحدة منها السيطرة على غيرها وعلى البحار والتجارة ،

كما فيها أيضاً حرية فكرية تسمح بتنافس حر طليق بين أفراد المدينة للسيطرة على مصائرهما . وهذا كله مما جعلهم ينمون ملكة النظر العقلي وفنون البلاغة والخطابة والدراما والفلسفة والسفسطة وغيرها من وسائل التأثير على الجماهير . فأدى بهم كل ذلك الى التنبه الى فن الجدل والمناظرة والمنطق وبالتالي الى اكتشاف فكرة العلم ذاتها كحجة أو برهان . هكذا ظهرت فروع المعرفة المختلفة عندهم وعلى رأسها الرياضيات التي تبرز فيها العقلية النظرية البرهانية الى أبعد حد ، وذلك منذ أقدم مفكرهم الذين حفظ لنا التاريخ ذكرهم أمثال طاليس وفيثاغور . والأول منهما هو الذي حسب ارتفاع الهرم الأكبر بقياس ظله عندما يكون ظل كل شيء مثله . أما الثاني فهو معلم الإنسانية كلها فكرة العلم بإنشائه الرياضيات وإلى مدرسته ينتسب رياضيو اليونان .

إن التفكير الرياضي الذي بدأ بفيثاغور في القرن السادس قبل الميلاد تميز بظاهرتين : أولاهما أنه امتزج دائماً بنظرات ميتافيزيقية زائدة على حاجات الرياضة نفسها وهكذا ذهب فيثاغور (أو تلميذه فيلالاوس) كما يروي أفلاطون وأرسطو) الى أن كل شيء في الوجود هو شكل هندسي وعدد . ويشف هذا التصور الميتافيزيقي الرياضي للوجود عما وصل اليه الذهن اليوناني منذ بداياته من مراحل التجريد العقلي أو العلمي الذي أفرغ العالم من كل مادته الظاهرة مستبقياً أشكالاً هندسية وأعداداً . وواضح أن مثل هذا التجريد للمكان والأعداد الذي لا تقوى عليه الشعوب البدائية أو شعوب حضارات ما قبل العلم كما رأينا إنما هو شرط أول لتكوّن الفكر الرياضي الذي يسبح دائماً في مكان متجانس الأجزاء وأعداد مباحنة للمعدودات .

أما الظاهرة الثانية فهي أنه عُنى بجل وبرهان مسائل متفرقة من الرياضة وإن لم يعن بربط وتنسيق تلك المتفرقات في نسق علمي موحد تتسلسل فيه النظريات

كما هو الشأن في الرياضيات الآن . ولكنه في حله وبرهانه تلك النظريات إنما أبرز لنا بكل تأكيد فكرة المعرفة العلمية على حقيقتها لأن العلم استدلال على قضية ما . وهكذا برهن فيثاغور لأول مرة في التاريخ النظرية الوحيدة التي تنسب اليه في الهندسة القائلة بأن المربع القائم على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك في كل الحالات الممكنة لتطبيقها وبغض النظر عن أطوال الأضلاع المعينة التي وقف عندها المصريون والهنود إذ لم يدركوا تلك النظرية كما رأينا إلا في تطبيقين اثنين لها . وهذا البرهان الفيثاغوري المعروف في كتب الهندسة كفيلى وحده بأن يضع صاحبه فوق هامة العلم والطريقة العلمية لما تكشفه عن اتجاه عقلي غير مسبوق ولفتة مبتكرة إلى تصور العلم كقضية لا تقبل في مدينة العلم إلا مقترنة بالدليل على صحتها صحة عامة تنطبق على كل الجزئيات التي نصادفها لها في التجربة .

إن الفارق الكبير بين الموقف العلمي لفيثاغور في برهانه لنظريته والموقف العملي عند المصريين والهنود هو أن نظرية فيثاغور تثبت علاقة هندسية عامة بين المربعات المقامة على أضلاع مثلث قائم الزاوية بحيث لا تتوقف تلك العلاقة على قياس معين لأضلاع المثلث كما عند المصريين والهنود بل بالعكس من ذلك تكون أسلوباً أو مبدأ عاماً لقياس تلك الأضلاع في كل احتمالاتها الممكنة إذ يمكن التساؤل مثلاً عن طول الوتر عندما يكون الضلعان المجاوران للزاوية القائمة هما خمس وحدات وسبع ففي هذه الحالة يكون المربع المقام على الوتر هو $25 + 49 = 74$. ولكن نلاحظ الآن أن العدد الدال على مربع الوتر وهو 74 إذا اردنا ان نستخرج منه طول الوتر مقدراً بوحدات محددة وذلك باستخراج جذرة التربيعي نجد أنه لا جذر تربيعي له بالأعداد الصحيحة إذ أن جذره التربيعي عدد لا ينتهي

في كسوره واقع بين ٨،٩ وبهذا نجد أنفسنا أمام عدد غريب لأنه غير محدد اي غير قابل للقياس بوحدات معقولة مما يقاس به الضلعان الآخران .
فهناك إذن بسبب هذا العدد عدم تناسب أو عدم تقايس عددي بين أضلاع المثلث مما عرف منذ ذلك الوقت بالأعداد غير المتقايسة Incommensurables وهذا أول ما اكتشف من الأعداد غير المعقولة Irrational . إن مؤلفي العرب القدامى اصطالحوا على أن يطلقوا على هذا العدد غير المعقول اسم العدد « الأصم » وهو الذي لا ينتهي جذره التربيعي إلى أعداد محصورة (مثل $\sqrt{2}$) مثلاً، كما أطلقوا على العدد الذي يقبل عملية الجذر التربيعي في أعداد منتهية العدد « المنطوق ».

وهكذا نرى كيف اصطدمت نظرية فيثاغور الهندسية منذ بدايتها بعقبة كأداء هي ظهور أعداد صماء ، فعندما انتقل فيثاغور من الهندسة إلى الحساب العددي لقياس أطوال الأضلاع ظهرت له هذه المشكلة غير المتوقعة ، تلك الأعداد الصماء التي لا يقابلها شكل هندسي ما سواء في تربيعها لتكون مربعاً قابلاً للقياس على ضلع من أضلاع المثلث أم في جذرها التربيعي لتكون مستقيماً يقاس من أضلاع المثلث بعدد منطوق على حد سواء . فتساءل كيف لا تستقيم نظريته الهندسية بالنسبة إلى الكثير من الأعداد وهي الأعداد الصماء، واعتبر ذلك « فضيحة » كتمها إلا عن تلاميذه وأوصاهم ألا يكشفوا سرها لكي لا يصيبهم شر . وهكذا اتخذت الفيثاغورية هيئة جمعية سرية عرفها التاريخ القديم طويلاً وعلى غرارها قامت جمعيات سرية في التاريخ القديم والحديث ومنها اخوان الصفاء في الحضارة الإسلامية .

إن تلك الفضيحة أو بالأحرى عجز الطرق الحسابية الذي كشف عنه وجود مثل تلك الأعداد الصماء منذ الخطوات الأولى للرياضة في الحضارة اليونانية

يبين سبب عدم الركون إلى علم العدد أو الحساب في حل المشاكل الرياضية في تلك الحضارة وبالتالي عدم تطوره إلى جبر وتحليل ، ومن ثم تأخرت منزلة الحساب في العالم القديم وتقدمت عليه الهندسة وقامت كعلم ناضج منذ البداية وخضع الحساب نفسه إليها . وحتى عند الفيثاغوريين أنفسهم نشاهد إخضاع علم العدد أو الحساب إلى الهندسة من أكثر من جهة .

أولاً من جهة أن فيثاغور وتلاميذه لم يتراجعوا أمام مشكلة الأعداد الصماء فحاولوا التغلب عليها على الوجه الآتي : حاولوا بالاستقراء جمع كل ثلاث من الأعداد الصحيحة (المعبرة عن أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية) لا يؤدي إلى عدد أصم . وفي ما يختص بالأعداد التي يؤدي جدها إلى عدد أصم حاولوا أن يحددوا ذلك العدد بوضع أقرب سلسلتين إليه من الأعداد الكسرية احدهما بالزيادة وأخرها بالنقص فيقع العدد الأصم بينهما .

أما الجهة الثانية لإخضاع العدد إلى الهندسة فتأتج عن رمزهم للأعداد الحسابية بالنقط كما هو الأمر الآن في ترقيم أوراق اللعب مثلاً وكانوا يرتبون تلك النقط في أشكال هندسية كالمستقيم والمثلث والمربع والمخمس والكثير الأضلاع فيحصلون بذلك على الأعداد المستقيمة والمثلثة والمربعة وهكذا ، أعنى يحصلون دائماً على أشكال هندسية ، وابتداء من هذه الأشكال يتوصلون إلى الأعداد إذ قد وضعوا قواعد لكل شكل منها للحصول على ترتيب النقطة الأخيرة فيه الدالة على عدد الشكل مهما كان امتداده وكبره . وأنه لمن السهل إدراك القاعدة العامة التي تعرف بها قيمة العدد n في أي شكل هندسي فهي على سبيل المثال في العدد المثلث $\frac{n(n+1)}{2}$ وفي العدد

المربع n^2 وهكذا .

ولقد درسوا خصائص الأعداد فميزوا الأعداد الأولية والأعداد الصماء والأعداد المنقسمة بالنسبة لكل عدد . وجاء من جمعهم لقواسم كل عدد أنهم ميزوا العدد المخصب أو المكثّر وهو الذي يزيد مجموع قواسمه على العدد نفسه ، ثم العدد المجدّب أو المقل وهو الذي يقل عن مجموع قواسمه ، ثم العدد الكامل وهو الذي يتساوى ومجموع قواسمه . مثل هذه الأبحاث التي شغف بها الفيثاغوريون في الأعداد والتي عرفت بها الكتب العربية القديمة لم تؤد إلى نظريات علمية ولم تستبقها الرياضة الحديثة وإن كانت مع ذلك لا تخلو من طرافة وعمق ففيها مسائل لم تستطع الرياضة الحديثة حلها : فإن المسألة الفيثاغورية وهي هل يوجد عدد فردي وكامل معاً مسألة لم يجد الرياضيون المحدثون لها بعد حلاً كما أنهم لم يبرهنوا على امتناع وجود مثل ذلك العدد .

ولا شك أن الفيثاغوريين لو اتخذوا رموزاً للأعداد غير الأشكال الهندسية لتوصلوا كما يقول دريفوس (Dryfus) إلى نتائج مخالفة بالمرة .

إن الذي نود أن نخلص إليه مما تقدم هو أن علم الأشكال أو الهندسة كان العلم الرياضي الذي نضج منذ البداية والذي كانت تحل بواسطة مشكلات الرياضة اليونانية وإليه اخضع الحساب .

وحتى في حضارة العصر الإسكندري الذي ورث اليونان والشعوب القديمة الأخرى والذي ابتدأت الرياضيات فيه بأخطر كتاب في الرياضة القديمة وهو « الأصول » لأقليدس ، نجد أن علم الهندسة هو موضوع الكتاب الأساسي وأن علم الحساب ألحق بها كآخر فصل من فصولها ومشتق منها .

حقيقه لقد انقلبت الأوضاع الرياضية منذ القرن السابع عشر بعد

أن ظهر الجبر الحديث الذي هو تعميم للحساب ثم بعد أن ظهرت الهندسة التحليلية التي هي معالجة للمشاكل الهندسية بالطرق الجبرية ، فأصبح علم التحليل الجبري بنظرياته في الدوال الرياضية المختلفة العلم الذي له الغلبة على علم الاشكال الهندسية ، بل تراجعت هذه شيئاً فشيئاً حتى لم تعد هناك أشكال في الهندسات المعاصرة وإنما النظر كله فيها منصب على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة ، فاختلفت بذلك مكانة الهندسة في العصر الحديث إذ أصبحت مسودة بعد أن كانت سائدة وأصبح التحليل الجبري وبالتالي العدد سائداً بعد أن كان مسوداً . إلا أنه رغم هذا الانقلاب والتطور فإن المنهج الذي اتبعه أقليدس أو بالأحرى المسائل المنهجية التي تضمنتها هندسته والتي أسهم الفيلسوفان أفلاطون وبخاصة أرسطو في إرساء أسسها واضاعتها حتى صارت هندسته مثلاً علمياً يحتذى طوال العصور ، هذه المسائل المنهجية هي بعينها المسائل التي أثبت أخيراً بالنسبة إلى الرياضيات الحديثة في وضعها الجبري . وهذه المسائل كما سنرى متشعبة أشد التشعب ويؤلف مجموعها المسائل التي ستعنى بها فلسفة الرياضيات التي هي موضوع هذا الدراسة . ولذلك نتوقف الآن عند النظر في المنهج الذي اتبعه أقليدس في «الأصول» ونبدأ منه للنظر في إلقاء ضوء على كل الأبحاث المعاصرة في أسس الرياضيات بقسميها : الهندسة والتحليل .

الفصل الثالث

تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم في سبيل تأسيس علم رياضي وثيق

(٧) لا بديل في الرياضة عن منهجها (٨) تعريف الرياضة بمنهجها
(٩) تحليل أرسطو لأسس الهندسة وتطبيق أفليدس لهذا التحليل في
إقامة نسق استنباطي للهندسة .

—(٧)—

عندما انطفأت حياة الأسكندر الأكبر انتقل مركز الحضارة الفكرية من أثينا الى الإسكندرية حيث انشأ بطليموس الثاني فيلادلف بناء ضخماً سماه المتحف ابتاع له نفائس مكتبات أثينا ومنها مكتبة الليسيه التي جمعها أرسطو ، وجعله في آن واحد مكتبة ومعهداً للدراسة وأكاديمية للعلماء الذين اجتذبهم من أطراف العالم شرقاً وغرباً يعيشون بين جدرانها وعلى نفقة الدولة . وفي قاعاته الفسيحة المزدهمة بأوراق البردي انتشر المؤلفون والنساخ والمترجمون ينقلون تراث الماضي ويهذبونه ويجددون فيه .

نحن الآن في عام ٣٠٠ ق . م . حيث نجد بين هؤلاء العلماء رجلاً

أحكم الصمت عن حياته حتى جهلنا كل شيء عن أصله وسيرته ومولده ووفاته . ولا نعلم من كلماته المأثورة غير تلك الكلمة التي أصبحت مثلاً في الكتب الأوروبية والتي ارتاعت لها حاشية الملك وذلك حين سأل الملك في إحدى زياراته للمتحف رجلاً ينظر في أشكال هندسية رسمها فوق الأرض هو أقليدس بقوله ألا تعرف طريقاً آخر لاتقان الرياضيات وامتلاك ناصيتها غير طريقتك في كتابك « الأصول » ؟ (Elements) . فأجابه أقليدس بأنه « لا يوجد في الرياضيات طريق ملكي » . وهو يعني أن للعلم طريقته التي تفرض ذاتها على كل من يطلبه والناس سواسية فيها . ولم يغضب بطليموس مع أن البطالة اشتهروا بسفك الدماء لأتفه الأسباب فقد كان يعمل على توطيد ملكه بإنشاء صروح للفن والعلم التي تخلد أسرته . وفيما يختص بعلم الرياضة بالذات توصل بطليموس ولا ريب إلى هدفه منذ إنشاء المتحف فإن كتاب « الأصول » في الهندسة لأقليدس هو من الوجهة العلمية البحتة أوثق الكتب كلها التي انحدرت إلينا من الفكر القديم وأكثرها تداولاً بعد الإنجيل عند الغربيين طوال العصور كما يلاحظ مؤرخ الرياضة كوليروس Colerus الذي قال كذلك إنه طبع أكثر من ١٥٠٠ طبعة بلغت نسخ بعضها أرقاماً خيالية .

وسر النجاح المنقطع النظير لمؤلف أقليدس هذا عبر العصور لا يرجع إلى ابتكار أقليدس لنظريات جديدة ومتفرقة كما كان يفعل الفيثاغوريون من قبل — وإن كان أقليدس قد ابتكر فعلاً — وأضاف نظريات رياضية في مؤلفات أخرى له — وإنما يرجع سر نجاحه إلى الطريقة أو المنهج Methodo الذي اتبعه في كتابه « الأصول » في استعراض النظريات المبعثرة المتناثرة المعروفة عند الفيثاغوريين السابقين وذلك بتنسيقها في نسق علمي موحد محكم الحلقات بحيث يتوقف فيه برهان كل نظرية لاحقة على نظريات أخرى سبق برهانها وسادقة عليها في داخل بناء منطقي يجمع كل النظريات المتفرقة ويستند بعذافيره إلى

أسس أو مقدمات أو كما يقول هو إلى « أصول » محددة قليلة ووثيقة تبقى خارج البرهان لم يفتن الرياضيون إليها من قبله . في الواقع كان الرأي الرياضي العام قد ضج بالفضائح الرياضية من النوع الذي صادفناه وزهد في ابتكار نظريات جديدة تتعرض إلى الهدم والإنكار على أساس حجج سفسطائية بل كان قد سئم مثل تلك الترهات ، وتطلع إلى إيجاد حل حاسم لإقامة علم رياضي موحد جدير باسم العلم . إذن كان الزمن قد نضج ليثمر أفليدس . وكانت رسالة أفليدس أن يخرج ذلك العلم إلى حيز الوجود وأن يكون سر نجاحه في تأسيس ذلك العلم الطريقة أو المنهج الذي اتبعه في تنسيق نظريات الرياضة المتفرقة وربطها برهانياً بحيث يستنبط بعضها من بعض . وهذه الطريقة المثل التي أثمرت الرياضيات كلها حتى اليوم هي التي تساءل بطليموس عن إمكان بديل لها . فلم يجد عنها بديلاً للملوك .

ها نحن نقف فجأة في فلسفة الرياضة أمام فكرة « المنهج » الذي أثمرها كعلم ، فإلى هذا المنهج نحول النظر منذ الآن ونكرس الانتباه ذلك لأن تحليل خطوات ذلك المنهج لبيان الأسس والأصول التي تقوم عليها الرياضة ونقد تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا رياضية هي المسائل التي تتناولها فلسفة الرياضة وتجب عليها .

-(٨)-

ونحن عندما نثير فكرة المنهج في الرياضة يجب أن نعود أدراجنا إلى الوراء ، إلى ما قبل أفليدس نفسه ، أعني إلى الفلاسفة - لا إلى الرياضيين طبعاً - الذين مهدوا ولا ريب لأفليدس في منهجه الذي اتبعه لبناء علم رياضي . فهنا نلمس التعاون الوثيق الذي نشأ بين الفلسفة والرياضة ليس

فقط في مجال فلسفة الرياضيات التي هي فلسفة ، وإنما في إقامة الرياضيات ذاتها كعلم وثيق وذلك بفضل التحليل الفلسفي لأسس الرياضيات .
وفي تلك العودة نمهد بتعريف للرياضيات على أساس منهجها كما يعرفها المحدثون .

لقد سبق أن عرفنا الرياضيات على أساس موضوعها وهو التعريف التقليدي لها الذي يقول أنها علم الكم والمقدار ، أو علم الكم المتصل (الهندسة) والكم المنفصل (العدد) .

وألحظ الآن أن هذا التعريف « بالموضوع » يعتبر اليوم غير صالح للتعبير عن طبيعة الرياضيات ككل منسجم متسق يضم فروعاً عديدة لا يدخل بعضها بكل تأكيد تحت مقولة الكم أيّاً كان لأن من فروعها أو موضوعاتها ما لا يمت للكم متصلاً أو منفصلاً بصفة . وربما كان سابقاً لأوانه بيان أن هندسة كهندسة الوضع (Geometry of Situation) أو الحساب الهندسي عند جراسمان أو جبر المنطق عند جورج بول أو غير ذلك من النظريات الرياضية الحديثة لا حديث فيها عن الكم مع أنها نظريات رياضية .

لذلك فإن الاتجاه الحديث للتعبير عن طبيعة الرياضيات ينحو نحو تعريفها تعريفاً يتمشى مع كل فروعها كما يتمشى معها ككل منسق تتوقف فيه نظرية رياضية على نظرية أو نظريات أخرى . وهذا التعريف إنما هو تعريف لها بطريقتها أو منهجها لا بموضوعاتها التي تتناولها . إلا أن تعريف الرياضيات بمنهجها على هذا النحو يكشف في الوقت نفسه عن طبيعة موضوعها كما يتصوره المعاصرون الذين تخلوا عن التصورات القديمة للكم متصلاً ومنفصلاً كموضوع للرياضيات . لكن هذا التعريف للرياضيات على أساس منهجها إنما ينتاج

إلى مقدمات لكي يفهم لأنه لما كان التصور الحديث لطبيعة الرياضة والتحول إلى الاهتمام بمنهجها إنما نشأ عن حركة النقد الداخلي التي قام بها رياضيو القرن التاسع عشر لتصوراتهم الرياضية التقليدية وكانت نقطة انطلاق تلك الحركة إحدى مسلمات هندسة أفقليدس التي حاول الرياضيون عبثاً البرهان على صحتها كتنظرية من النظريات فكشفوا بفشلهم المتكرر عن عوالم هندسة أخرى غير عالم أفقليدس ، ثم لما كان الكلام في مناهج الرياضة قد سبق إليه أرسطو وأفقليدس المحدثين من الناظرين في هذا الموضوع فإنه يجب أن نقف عند مذهب هذين المفكرين القديمين قبل أن نتناول موضوع النقد الداخلي للرياضة في القرن الماضي الذي أثار موضوع فلسفة الرياضة في الفكر المعاصر بكل ما في هذا الموضوع من مواقف متعارضة متضاربة وحية .

* * *

-(٩)-

أن معرفة أرسطو برياضيات عصره ، ودوره وعلماء الليسيه في تقديمها وجمعها ، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضي أمر لا مجال للشك فيه وهو ما يدل عليه على الأقل كتابه المسمى « التحليلات الثانية » الذي تناول فيه البرهان اليقيني أو بصفة أخص الرياضي من حيث صلة هذا البرهان بالمنطق الصوري . فبين أن اليقين الذي تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها إنما هو مستمد من أنها علم برهاني . (Demonstrative Science) أو كما يقال الآن علم استنباطي Deductive Science أو نظرية إكسيوماتيكية Axiomatic .

والعلم البرهاني عنده هو العلم الذي يحتاج لقيامه كعلم إلى نقط بدء

أي أسس أو مبادئ يبدأ منها برهان قضاياه ونظرياته . وتلك الأسس أو المبادئ قليلة العدد وغير قابلة للبرهان في العلم الرياضي نفسه وإن كانت تبرهن في علم أعلى كالميتافيزيقا التي هي علم المبادئ الأولى للوجود ومنها مبادئ الرياضيات طبعاً .

من هذه المبادئ ما هو مشترك بين العلوم كلها كالمبادئ الأولية الثلاثة للوجود والفكر وهي الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع . ومنها ما هو خاص بكل علم على حدة ، وأهمها فيما يختص بالرياضيات ما يأتي : —

١ — التعريفات وهي قضايا تشرح معنى الحدود الأولية ولا يقال لها صادقة أو كاذبة ، كتعريف الخط مثلاً بقولك إنه طول لا عرض له .

٢ — الأصول الموضوعية (Oxiomes) أو الأوضاع المتفق عليها وهي ما ترجمه العرب بعبارة « العلوم المتعارفة » . وهي قضية لا برهان عليها وواضحة في ذاتها حتى لكأنما الإنسان يعرفها دائماً إذا ذكرت أمامه كما أنه لا غنى عنها لمن يريد التعلم . ومثالها قولك الكل أكبر من الجزء .

٣ — المسلمات Postulats وهي ما نقله العرب في كلمة « المصادرات » . وهي أيضاً قضية لا برهان عليها ولكنها تختلف عن الأصل المتواضع عليه في أنها ليست بينة في ذاتها ويجد المتعلم عناداً في قبولها ومن ثم فهو يصادر بها حتى تتضح له فيما بعد ومثالها : المتوازيان لا يلتقيان مهما امتدا .

كل هذه المبادئ لا تبرهن في العلم الذي يستند إليها وإنما في علم أعلى كالفلسفة الأولى ، ولكنها المبادئ التي تستمد منها براهين النظريات الرياضية سواء مباشرة أو مما سبق برهانه من النظريات بواسطتها .

إن مثل هذا التحليل الأرسطي غير المسبوق في تاريخ الفكر الذي أوجزه

هنا إنما يشهد بعناية هذا الفيلسوف الكبير بفلسفة العلوم منذ القدم ويشهد أكثر من هذا بأن هذا المؤلف الذي جعل من الليسيه معهداً لدراسة تاريخ العلوم والإسهام في تقدمها كان أسبق من الرياضيين في فحص مسألة مصادر اليقين الرياضي بفحص الأسس التي يقوم عليها البناء الرياضي كله . كما أنه وضع حجر الزاوية لتعاون لم ينقسم منذ ذاك الوقت بين الفلسفة والرياضة فأنشأ بذلك منذ القدم فلسفة الرياضة التي هي مجال هذا التعاون الدائم المستمر بين العلمين . لكنه لم يذهب إلى أبعد من هذا التحليل الرائع في حد ذاته ، فلم يقم نسقاً رياضياً على هذه العناصر التي ميزها بل ترك الرياضة نظريات مبعثرة وغير موثقة في بناء موحد كما هو الشأن عند الفيثاغوريين .

وفيما يلي فقرات من كتاب النجاة (ص ١١٢) للفيلسوف الاسلامي ابن سينا توضح ما أوجزناه عن أرسطو .

يقول ابن سينا : « الأصول التي تعلم قبل البرهان ثلاثة : حدود وأوضاع ومقدمات .

فالحدود تفيد تصور ما لا يكون بين التصور من موضوعات الصناعة ... مثل أن النقطة طرف لا جزء له ، والخط طول لا عرض له ، والسطح كذا ... وليست تفيد تصديقاً البتة ولا فيها إيجاب ولا سلب .

وأما الأوضاع فهي المقدمات التي ليست بينة في نفسها ولكن المتعلم يُراود على تسليمها وبيانها في علم آخر وإما بعد حين في ذلك العلم بعينه ، مثل ما نقول في أوائل الهندسة أن لنا أن نصل بين نقطتين بخط مستقيم ، ولنا أن نعمل دائرة على كل نقطة وبقدر كل بعد ، ومثل أن الخطين إذا وقع عليهما خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن الخطين يلتقيان من تلك الجهة .

فما كان من الأوضاع يتسلمه المتعلم من غير أن يكون في نفسه له عناد سمي أصلاً موضوعاً وما كان يتسلمه مسامحاً وفي نفسه له عناد يسمى مصادرة ... اهـ.

أما أقليدس الذي يكاد يكون معاصراً لأرسطو فقد كان كتابه المسمى «الأصول» دائرة معارف لما وصلت إليه رياضيات القدماء. فقد جمع فيه نظريات القدماء المبعثرة التي ظهرت في القرون الثلاثة السابقة عليه ونسب بعضها إلى مكثفيتها، وقدم الهندسة على نظرية الأعداد (الحساب) واشتق هذه الأخيرة من الأولى متأثراً بالفيثاغوريين، ونسق هذا كله ولأول مرة في التاريخ في نسق أو بناء واحد محكم الحلقات بحيث يستند برهان كل نظرية لاحقة إلى ما تقدم عليها في الترتيب داخل ذلك البناء وبحيث يستند النسق كله إلى تلك المقدمات أو المبادئ التي ميزها أرسطو في تحليلاته الثانية. ولا يمكن فهم أقليدس أو العمل الذي أنجزه في كتاب الأصول إلا في ضوء تعاليم أرسطو في هذه التحليلات فحقق كتابه بفضل تأثير أرسطو أوثق علم انحدر عبر العصور من العالم القديم. ونحن لا نستطيع أن نحدد كيف تأثر أقليدس بأرسطو ولا كيف أخذ عنه ولكن الأثر أكيد وواضح. وكما بين أرسطو في تحليلاته كل نظرية يقينية أو برهانية إنما تقوم على قبول عدد قليل من المقدمات أو المبادئ تبدأ منها البرهنة على كل القضايا القابلة للبرهان بينما تبقى تلك المقدمات خارج البرهان وغير قابلة له في نطاق العلم القائم عليها. وهذه المقدمات عند أقليدس هي :

١ - التعريفات أو الحدود. وأعطى أقليدس ٢٣ تعريفاً أو شرحاً للحدود

منها على سبيل المثال :

- النقطة ما ليس له بعد.

- الخط طول لا عرض له.

— المستقيم هو الخط المشابه لنفسه ، الخ ...

٢ — المسلمات أو المصادرات وهي تختلف عن معناها عند أرسطو لأن أقليدس يعني بالمسلمات أن أشكالاً معينة هي أشكال ممكنة ، ومن هذه الأشكال :

— مد خط مستقيم بين نقطتين .

— مد مستقيم إلى ما لا نهاية .

— كل الزوايا القائمة متساوية .

— إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الموجودتين من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن المستقيمين المذكورين أو امتدادهما يتلاقيان .

(وتسمى هذه بقضية المتوازيين أو بالمسلمة الأقليدية

الخامسة) .

٣ — الأصول الموضوعية أو العلوم المتعارفة وهي المعارف المقبولة عامة أي البديهية ، وقد قبل أقليدس ٢٨ قضية من هذا النوع منها : —
— الأشياء المساوية لشيء بالذات متساوية فيما بينها .

— الكل أكبر من الجزء . الخ ...

وعلى أساس هذه الأنواع الثلاثة من المقدمات أو المبادئ أو الأصول يبرهن أقليدس عدداً كبيراً من القضايا المبرهنة ، أي المشتقة بالبرهان ، وهي إما نظريات Théorèmes أو ملحقات Corolaires أو تمارين مشهورة .

وقد حلل أقليدس بالإضافة إلى هذا خطوات برهان كل نظرية على حدة فذكر ثماني خطوات منها : ذكرُ منطوق النظرية Enoncé (٢) إعادة المنطوق مع الاستعانة بشكل مرسوم (Ecthèse) (٣) افتراض التسليم بصحة القضية (Epagogé) فيستعان بقضية أخرى سلم بها أو تم برهانها

(٤) ثم الأشكال الإضافية أو انشاء الأعمال (Construction) وهو عبارة عن تحليل القضية التي يراد برهانها إلى أشكال أخرى مألوفة وأبسط منها الخ .. الخ ... حتى الخطوة الثامنة والأخيرة وهي إعلان النتيجة .

كل هذه الخطوات التي يمارسها فعلاً الذين يقومون بالبرهان كانت معروفة قبله عند قدماء المهندسين وينسب أفلاطون إلى نفسه اكتشاف بعضها في محاوراته . ولكن أهمية أقليدس لا ترجع إلى مثل تلك الخطوات العملية التي تتبع في الحل وإنما فقط إلى أنه استناداً إلى تحليلات أرسطو الثانية استطاع أن يبني نسقاً استنباطياً واحداً لكل النظريات المبعثرة التي خلفها السابقون تستبطن في داخله النظريات اللاحقة مما سبقها في الترتيب ويستند الاستنباط برمته إلى قبول عدد محدود من المقدمات أو الأصول كما قدمنا .

ولما كنا سنتناول بالتفصيل طبيعة « النسق الاستنباطي » هذا عند المحدثين الذين يُعرّفون الرياضيات بالأشارة إلى هذا المنهج وحده ، فيجب أن نميز منذ الآن التصور المشترك بين أرسطو وأقليدس لهذا النسق .

نعلم الآن بعد الذي تقدم أن النسق الاستنباطي عندهما إنما يقوم على استخلاص مقدمات أو قضايا أولية أهمها الأصول الموضوعية (Axiomes) والمسلّمات أو المصادرات (Postulats) ولا فارق بين النوعين إلا في درجة الوضوح والبداهة لدى المتعلم : فالأولى أوضح بينما يعاند العقل في قبول الثانية ويتقبله متساهلاً وحسب . فاذا أغفلنا هذا الفارق السيكلوجي أو البيداجوجي (التعليمي) فإن تلك القضايا الأولية تعتبر مطابقة للواقع ومعبرة عنه ، أعني تعتبر في ذاتها أنها « حقيقية » . فالحقيقة هي في المطابقة التامة مع الخارج أو العالم الواقعي . هذا بكل تأكيد هو موقف أرسطو وأقليدس المشترك . والفيلسوف كانط (Kant) لم يتردد في تأييد مثل هذا الرأي .

على نحو يختلف بعض الشيء عندما نظر إلى تلك القضايا الأقليدية الأولية على أنها قضايا « ضرورية » (Necessaires) لأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقي الوحيد . وإن كان هذا المكان عنده ذاتياً في الذهن البشري وليس واقعياً في العالم الخارجي كما عند أرسطو وأقليدس ، وهذا هو الفارق بين الموقفين ، ولكن هذا الفارق لا يؤثر في كون تلك المبادئ الهندسية هي قضايا حقيقية لأنها معبرة مباشرة عن خصائص المكان سواء أكان في الخارج (أقليدس) أم في باطن الذهن (كانط) : فالخط يمتد عند كانط إلى ما لا نهاية والكل أكبر من الجزء والمتوازيان لا يلتقيان الخ ...

والمناطق المعاصرون عندما يتحدثون عن التصور المشترك بين أرسطو وأقليدس الخاص بطبيعة النسق الاستنباطي بقصد تمييزه عن تصور المحدثين يصفونه بأنه « نسق يقيني استنباطي » *Système Categorico-déductif* (انظر قاموس لالاند) والمقصود بهذه التسمية إبراز كلمة « يقيني » التي تشير إلى الفكرة المميزة حقيقة لتصور القدماء وهي أن المقدمات أو المبادئ التي يستند إليها النسق « يقينية » أي مطابقة للواقع الخارجي وتبعاً لذلك تكون أيضاً القضايا المشتقة منها بالبرهان (النظريات) يقينية كذلك . ولذلك حكم مفكر مثل كانط بأن الهندسة الأقليدية هي الوحيدة الممكنة للإنسان لأن قضاياها ضرورية .

لكن التصور المعاصر للنسق الاستنباطي لا يرى هذه المطابقة ولا هذه الضرورة إذ يعتبر القضايا الأولية مجرد فروض *Hypothèses* أو أوضاع نتواضع عليها ولا صلة لها بالواقع الخارجي أو المكان كما أنها ليست ضرورية عند الذهن . وكل ما يمتاز به هو أنها يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها بحيث يمكنها أن تنتج طائفة من القضايا المشتقة أو النظريات التي لا تتناقض

فيما بينها . وهذا التصور لا يسمح بالطبع بالتمييز بين مسلمات أو أصول موضوعة فكلها مجرد فروض أو أوضاع نتفق عليها . ومن ثم جاء اسمه . فالمناطق المحدثون يصفون هذا التصور الجديد بأنه « نسق فرضي استنباطي » *Système hypothetico - dèductif* (بيانو ومدرسة في إيطاليا) أو *Postulational System* (أمريكا) أو *Axiomatique* (هيلبرت ومدرسته في ألمانيا) وكلها عبارات بمعنى واحد هو أن المبادئ افتراضات ، وكلها تعريف للرياضيات بمنهجها ومن وجهة نظر المحدثين .

إن هذا التصور الجديد للنسق الاستنباطي هو الذي جعل الرياضيين المحدثين يتكشفون عن أوجه النقص الشديد في نسق أقليدس الهندسي فقد تبين الرياضيون أن نظريات أقليدس لا يمكن أن تنتج عن مقدماته الأولية وحدها لأن تلك المقدمات ناقصة نقصاً ذريعاً .

فإمام الرياضيين في مطلع هذا القرن وهو هنري بوانكاريه *Poincaré* بين نقص المقدمات الخاصة بالنقلة (*Deplacoment*) . والرياضي الألماني مورتز باش (*Pasch*) الذي عاش في آخر القرن الماضي بين كيف أن هندسة أقليدس تنقصها المقدمات الخاصة بالترتيب أو النظام *Axiomes D'ordre* وبين الفيلسوف المنطقي برتراند راسل *Russell* كيف أن الثماني والعشرين نظرية الأولى من كتاب أقليدس تستعمل ضمناً لا صراحة عدة مقدمات مضمرة لم ينص عليها في ثبت مقدماته . وكان ديفد هيلبرت (*Hilbert*) شيخ الرياضيين في ألمانيا حتى قبل الحرب الثانية أول من كمل وأتم أكسيوماتيك هندسة أقليدس في كتابه المسمى أصول الهندسة (١٨٩٩) . وهذا النقص كله لما يبرر قول برتراند راسل بأنه لم يكن قبل ديفد هيلبرت برهان هندسي واحد سليم . أي يستنبط نتائجه بدقة من المقدمات المصرح بها في بدايه

الهندسة ودون اللجوء إلى مقدمات أخرى مضمرة في ذهن الهندسي .

خلاصة هذا كله تعاون بين الفلسفة والرياضة في الكشف عن منهج
الرياضة ، تعريف للرياضة من حيث منهجها بأنها نسق إستنباطي ، اختلاف
بين القدماء والمحدثين في قيمة قضايا هذا النسق فهي حقيقية وضرورية أم
هي مجرد إفتراضات وأوضاع ، نقص ذريع في تحليل أقليدس لأصول
الهندسة وتدارك هذا النقص عند الرياضيين المعاصرين .

الفصل الرابع

من النقد الداخلي في الهندسة

الى الأكسيوماتيك الحديث

(١٠) حركة النقد الذاتي في الهندسة ونشأة هندسات كثيرة في القرن التاسع عشر (١١) معنى « الحقيقة » الرياضية الحديث ضد نظرية كانت في أسس الرياضيات (١٢) حركة تأسيس المسلمات في الهندسة (الأكسيوماتيك) بتتبع « الحدس » وتلقي بالمنطق الصوري (١٣) اقتراح لبوانكاريه يؤكد مدى اعتماد مسلمات الهندسة عن الحدوس أو الأشكال (١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات عند الرياضيين المعاصرين .

— (١٠) —

ننتقل الآن من الفكر القديم الى الفكر الحديث في مناهج الرياضيات . فلقد مهدنا بفكرة عن مناهج الرياضيات عند أرسطو وأقليدس لأننا سنجد أن القرن التاسع عشر يهتم أيضاً عند الرياضيين أنفسهم بفكرة المناهج في الرياضيات . ونحن نشرع في تناول المناهج الرياضية عند المحدثين في كل من الهندسة وعلم التحليل (Analyse) على حدة وهما القسمان اللذان

يقتسمان الرياضة . فنحصر الانتباه الآن في الهندسة وحدها مرجئين الكلا عن التحليل إلى مرحلة قادمة .

إنه في الهندسة بالذات بدأت ما يسمى حركة « النقد الداخلي » قبل أن تظهر في التحليل . ونقصد بالنقد الداخلي حركة فكرية عند رياضيي أوائل القرن الماضي جعلتهم ينصرفون عن التفكير في الاستزادة من الاكتشافات الرياضية وعن تغذية علمهم بالاضافات الجديدة ، ينصرفون عن ذلك كله إلى الاتجاه المضاد تماماً وهو التفكير في فحص أو نقد نظرياتهم الرياضية القائمة والمقبولة عندهم إلى ذلك الوقت بقصد التثبت منها ومن سلامة براهينها . أن مثل هذا النقد هو بالطبع نقد ذاتي وباطني في داخل الرياضة القائمة فعلاً . هناك في الواقع أبحاث طويلة عند الرياضيين في القرن الماضي بدأت بنقد داخلي لعلومهم وأدت آخر الأمر إلى الآراء الحديثة فيما يختص بالأسس والمناهج الرياضية .

وفيما يختص بالهندسة التي نعني بها الآن كانت نقطة البدء في حركة النقد الداخلي فيها المسلمة الخامسة عند أفقليدس التي ذكرناها فيما سبق . فلقد أدرك الرياضيون منذ زمن طويل بأن تلك المسلمة (مسلمة المتوازيين) ليست واضحة وبديهية كغيرها وحاولوا إقامة البرهان على صحتها كنظرية من النظريات المبرهنة على أساس المسلمات الأخرى أو بقبول مسلمات جديدة أكثر وضوحاً . تتجها . ومن هؤلاء المؤلفين نصير الدين الطوسي (القرن الخامس الهجري) وفي العصر الحديث الأب ساكيري Saccheri الرياضي الإيطالي (المتوفي ١٧٣٣) الذي جاء بما توهمه برهاناً لها فكان برهانه إيداناً بنشأة هندسات غير أفليدية . ومجمل القول في برهانه هو أن عدم استطاعة إثبات بطلان تلك المسلمة يتضمن في ذاته صحتها ، ولذلك فقد قبل الثماني والعشرين نظرية الأولى من أفقليدس التي تبرهن دون حاجة إلى

المسلمة الخامسة ، ثم بعد ذلك امتحن النتائج التي تنتج عن القول ببطلان تلك المسلمة فلجأ إلى الشكل ا ب ح د الذي يتساوى فيه ا د ، ب ح ويسقطان عمودياً على ا ب ثم امتحن الفروض الثلاثة الممكنة الناجمة عن القول بأن الزاويتين ح ، د قائمتان (وهذا هو منطوق تلك المسلمة عند نصير الدين الطوسي) أو حادثتان أو منفرجتان ، وتلك الفروض الثلاثة تقابل القول بأن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين أو أقل من قائمتين أو أكثر من قائمتين على الترتيب . فيرفض ساكيري الفرضين الأخيرين لتناقضهما مع المسلمات الأقليدية الأخرى مستبقياً الفرض الأول ناظراً إلى أن استحالة إثبات بطلانه يتضمن في ذاته صحة المسلمة المذكورة .

إن مجمل القول في برهان ساكيري هو أنه اعتقد في قوة « برهان الحلف » فتصور فكرة محاولة البرهان على صدق قضية المتوازيين باستنباط تناقض بين انكار هذه القضية وقبول المسلمات الأقليدية الأخرى ، فبرهان الحلف إذن هو عدم استطاعة استنتاج نقيض المسلمة الخامسة من المسلمات والنظريات المقبولة الأخرى .

إنه بغض النظر عن قيمة هذا البرهان السلبي الذي لا يبرهن القضية ذاتها وإنما فقط استحالة نقيضها أو بالأحرى استحالة بطلانها ، أنه فوراً إلى أن قيمة هذا البرهان من وجهة النظر الحديثة إنما جاءت من أن هذا البرهان أتاح فرصة لتكوين فروض ثلاثة سيعرف فيما بعد أنها تقابل على الترتيب هندسة أقليدس التقليدية وهندسة لوباتشفسكي Lobatschevski وهندسة ريمان Reimann . وهاتان الأخيرتان هندستان جديدتان من المجموعة التي سيطلق عليها الهندسات غير الأقليدية . Non - euclidian Geometries .

ولقد بذل الكثيرون بعد ساكيري جهداً منقطع النظير للبرهنة على

صحة المسلمة الخامسة المذكورة أمثال لوجاندر ودالمير ولوجرانج ، وهذا الأخير تقدم عام ١٨٠٠ يبحث إلى الأكاديمية الفرنسية في ما توهمه برهاناً لها حتى إذا هم بالقائه اعتدربأنه لا بد أن يعيد النظر فيه . وهذا كله يشهد بفشل كل المحاولات في البرهنة على صحة تلك المسلمة . وكان لا بد لهذا الفشل المتكرر رغم الجهود الجبارة من أن يؤدي آخر الأمر إلى أن يفترض الرياضيون امكان قيام هندسة غير أقليدية تكون فيها المسلمة المذكورة باطلة . والرياضي هالستد Halsted على حق حين لاحظ أن اكتشاف تلك الهندسة أصبح أمراً محققاً في مطلع القرن التاسع عشر . ففي عام ١٨١٦ أتم كارل فردريك جوس (Gauss) الألماني بعد دراسة وثيقة كتاباً لم ينشره خوفاً من صدمة للرأي الرياضي العام أثبت فيه وجود تلك الهندسة غير الأقليدية . ولكن الرياضي الروسي لوباتشفسكي الاستاذ بجامعة قازان كان أول من نشر أبحاثه في تلك الهندسة عام ١٨٢٨ فعرفت باسمه تلك الهندسة التي اكتشفها جوس من قبل والتي تقابل الفرض الثاني من فروض ساكيري .

ولم يمض غير قليل من الوقت حتى اكتشف ريمان عام ١٨٥٤ هندسة أخرى غير أقليدية على أساس الفرض الثالث من فروض ساكيري يقبل فيها على خلاف أقليدس أن المستقيم لا يمتد إلى مالا نهاية وانما هو ينتهي حتماً (وهذا عكس المسلمة الرابعة عند أقليدس التي تقبل مد الخط إلى مالا نهاية) كما يقبل فيها أيضاً ان كل مستقيمين على سطح واحد لا بد يلتقيان في نقطتين فلا توجد والحالة هذه مستقيمتان متوازيتان بالمعنى الأقليدي . وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة لوباتشفسكي عدداً لا ينتهي من المستقيمتان المتوازيتان التي تمر كلها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما .

وفي كل من هاتين الهندستين الجديدتين تتابع القضايا أو النظريات

تتابعاً محكماً كما هو الشأن في هندسة أقليدس ولكنها بالطبع نظريات مختلفة فيما بينها بالنسبة للهندستين الجديدين، كما أنها تختلف جميعها عن نظريات الهندسة الأقليدية المألوفة لنا .

ومن المعلوم أن المكان (Spaco) الذي تقوم عليه هندسة لوباتشفسكي انحناء السطح فيه سلبي محض ولذلك فإن تخيل الأشكال الهندسية التي تتحدث عنها غير يسير مع دقة تسلسل قضاياها بيد أنه من الهين تخيل الأشكال في هندسة ريمان عند مقارنتها بهندسة أقليدس لأن المكان فيهما إيجابي . ولكي نتخيل هذا يجب أن نتذكر أننا نعيش في عالم طبيعي كله كرات فالأرض والكواكب كروية الشكل وعلى هذا فالهندسة المعبرة عن مثل هذا العالم كالهندسة الريمانية تكون هندسة واقعية بينما تكون هندسة أقليدس هندسة وهمية أي غير واقعية بالنسبة لعالم الكرات ، مثلاً : —

— تكون المستقيمات الأقليدية الوهمية عبارة عن منحنيات أو أقواس أو دوائر مغلقة في الهندسة الريمانية .

— يكون أقرب بعد بين نقطتين في العالم الواقعي هو القوس الريماني لا المستقيم الأقليدي الوهمي .

— يكون السطح الأقليدي سطح كرة في الهندسة الريمانية فإذا تخيلنا هذا تتضح لنا القضايا الريمانية الآتية : —

— كل مستقيم منته لأنه دائري (وبهذا تسقط المسلمة الرابعة عند أقليدس الخاصة بمد خط إلى مالا نهاية) .

— المستقيمان يمكنهما أن يحدا سطحاً أو مكاناً .

— كل المستقيمات تتقاطع في نقطتين ومن ثم لا توجد متوازيات (وبهذا تسقط المسلمة الخامسة) .

— مجموع زوايا المثلث تزيد على قائمتين زيادة تتناسب مع كبر أضلع المثلث ولكن المثلث الريماني المتناهي الصغر . مثلث أقليدي .

— السطح الريماني له ثلاثة أبعاد بالقياس إلى السطح الأقليدي كما أن المكان الريماني له أربعة أبعاد بالقياس إلى المكان الأقليدي ذي الأبعاد الثلاثة :

هكذا قامت هندسات ثلاث كل واحدة منها تقابل فرضاً من فروض ساكيري . وخواص تلك الهندسات هي : —

أولاً : إن مجموع زوايا المثلث تساوي أو تقل أو تزيد على قائمتين على الترتيب .

وثانياً : إن كلاً منها تنطبق على أسطح إنحناء كل سطح منها كما يقول أصحاب الهندسة انحناء ثابت (Constant) وهذا شرط ضروري لانتقال الأشكال فوق أسطحها انتقالاً حراً دون تشويه لها : فهو (أي الانحناء) صفر (أقليدس) وسالب (لوباتشفسكي) وموجب (ريمان) على الترتيب . وعلاقة تلك الهندسات فيما بينها عند المقارنة هي كما بين الرياضي بلترامي Beltrami كما يأتي : —

الهندسة	السطح	الانحناء	مجموع زوايا المثلث
١ — أقليدس	سطح	صفر	قائمتان
٢ — لوباتشفسكي	مسطح يشبه الكرة ...	أقل من صفر	أقل من قائمتين
	Pseudo - sphere		
٣ — ريمان	كروي	أكبر من صفر	أكبر من قائمتين

والنتيجة الهامة التي نخلص إليها مما تقدم فيما يختص بأسس الهندسة هي اذن أن المسلمة الخامسة مستقلة منطقياً عن بقية مسلمات أقليدس .

وفكرة الاستقلال هذه هامة جداً لأنها تسمح لنا بأن نستبدل المسلمة

الخامسة بغيرها ويكون البديل عنها إما نقيضاً أو نقيضاً لها (ريمان)
وإما مختلفاً فقط (لوباتشفسكي). فهو نقيض في ريمان لأنه يقول
إن كل متوازيين لا بد يلتقيان عند امتدادهما اذ هما مجرد مستقيمين على
سطح كروي واحد في حين كان أقليدس يقول إنهما لا يلتقيان مهما امتدا.
ثم عند لوباتشفسكي المسلمة البديلة مختلفة فقط عن مثلتها في أقليدس لأن
لوباتشفسكي يقول إنه من نقطة ما خارج مستقيم يمكن إقامة عدد لا ينتهي
من المتوازيات في حين كان أقليدس يقول من نقطة ما خارج مستقيم إن متوازيات
واحدة فقط هو الممكن أقامته.

على كل حال ثبت الآن أن المسلمة الخامسة مستقلة عن بقية مسلمات
أقليدس بحيث إذا ضم بديل أو أكثر إلى المسلمات الأخرى تكونت هندسات
مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات. وهذا تغير جوهري في أسس الهندسة
غير مسبوق مليء باحتمالات أخرى للتغير. ذلك لأنه نشأ بالطبع سؤال
جديد وهو هل يمكن إحداث تغيرات أخرى في أسس الهندسة بحيث ينشأ
مزيد من الهندسات المنتظمة القضايا؟ مثلاً هل يمكن وضع بديل أو أكثر
لمسلمة أو لمسلمات أخرى أو هل يمكن قبول مسلمات جديدة فتنشأ هندسات
جديدة؟ ذلك هو السؤال الذي سيطر على كل الأبحاث التالية في الهندسة
والذي لقي جواباً إيجابياً أيضاً.

ولكي نلقي ضوءاً على مثل تلك الإجابة دون أن نتورط في تفاصيل
فنية في الرياضيات ذاتها تبعدنا عن هدفنا في تركيز الكلام حول المنهج والأسس
نشير إلى أن الهندسات الثلاث المذكورة سابقاً تفرض كلها أن أشكالها الهندسية
يمكن أن تنتقل كلها في عوالمها المكانية دون أن يصيبها أدنى تشويه كما تنتقل
الأجسام الصلبة في مكانها الذي حددته كل واحدة من تلك الهندسات. وبما

أن هذه النقلة الحرة شرط للقياس - قياس شكل على آخر - في أي صورة كان ذلك القياس ، وصور القياس في الهندسات كثيرة كالمطابقة Congruence والاستدارة حول نقطة أو ساق Rotation والمساواة Equality والتحويل Transformation والانعكاس Reflection وتبادل المواضع Permutation وغير ذلك من العمليات المعروفة عند الهندسيين للقياس ، فان تلك الهندسات الثلاث تلتقي كلها في اسم مشترك هو أنها « هندسات قياسية » (Metrical Geometries) . فينشأ بالطبع عن ذلك الوضع المشترك سؤال أول وهو هل هناك إمكان لإيجاد تعبير عام للهندسة القياسية يكون بمثابة الفكرة المحورية فيها أو بمثابة قانونها العام المولد لها ؟ ومثل هذا السؤال يؤدي حتماً إلى التساؤل : وهل توجد هندسة غير قياسية (Non- Metrical Geometry) ؟ وهذا السؤال الأخير له أهمية لأنه يقودنا إلى الكلام عن بعض الهندسات غير القياسية .

لنأخذ مثلاً الهندسية الإسقاطية Projective Geom. . في هذه الهندسة على عكس هندسة أقليدس لا تؤخذ المساواة Egalité في اعتبار الأشكال وإنما تؤخذ فقط فكرة المعادلة Equivalence بينها إذ يكفي أن نتقل من شكل إلى آخر بالتحويل الإسقاطي Projective Transformation أي أن يكون أحد الشكلين المنظر المسقط للآخر دون مساواة بينهما وهذا هو معنى المعادلة ، ومن ثم فإن شكلاً ما يعادل أو يناظر آخر في الهندسة الإسقاطية مهما اختلف في حجمه ومساحته وأطواله .

وكثيراً ما يسمى هذا النوع من الهندسة الهندسة الكيفية Géométrie Qualitative لأن فكرة الكم تأتي في المقام الثاني بالنسبة للكيف الشكلي في هذه الهندسات غير القياسية . ومع ذلك فإن فكرة الكم لم تتلاش نهائياً لأننا

لا نستطيع أن نعرف مثلاً أن خطأ ما هو مستقيم أم غير مستقيم إلا إذا أجرينا قياساً كأن نطبق عليه حرف مسطرة مثلاً وهي آلة قياس .

لكن هناك هندسة تخرج منها فكرة الكم نهائياً مثل هندسة الوضع Geometry of Situation ففي هذه الهندسة يتعادل شكلان إذا أمكن الانتقال من أحدهما إلى الآخر بواسطة تشويه مستمر (Continuous deformation) مهما كان هذا التشويه بشرط أن يكون مستمراً أو متصلاً Continuous . وعلى هذا فإن دائرة ما تكون معادلة لشكل بيضاوي أو لأي منحن مقفل ولكنها لا تعادل خطأ لأن الخط غير مقفل . كذلك تعادل الكرة مثلاً سطحاً مقعراً ولكنها لا تعادل عجلة السيارة أو حجر الرمح لأنهما مفرغان من الوسط . لتخيل نموذجاً يراد رسمه ثم رسماً لذلك النموذج قام به رسام بدائي فإن النسب تتغير والخطوط المستقيمة التي ترسمها يد غير خبيرة تتعرج وتشوه : هذان الشكلان من وجهة نظر الهندسة القياسية والهندسة الإسقاطية لا يتعادلان ولكنهما يتعادلان من وجهة نظر هندسة الوضع . وهذه الهندسة هامة وذات استعمال واسع .

الهندسة الإسقاطية وهندسة الوضع مثالان لهندسات غير قياسية . مثل هذه الهندسات القياسية وغير القياسية أمكن إيجاد طريقة عامة لمعرفةا عندما أدخل ريمان وجراسمان Grassmann في وقت واحد تقريباً فكرة المكان ذي الأبعاد n أعني الذي أبعاده أكثر من ثلاثة كأن تكون أربعة (هندسة ريمان) وقد تكون غير متناهية . هذه الفكرة - فكرة المكان ذي الأبعاد n (مهما كان عدد n) لعبت دوراً هاماً في الأبحاث اللاحقة الخاصة « بكل الهندسات الممكنة ، المعروف منها وغير المعروف ، والقياسي وغير القياسي ، تلك الهندسات الممكنة التي تعتبر الهندسات السالفة الذكر (أقليدس -

لوباتشفسكي - ريمان - الإسقاطية - الوضع الخ ..) جزءاً ضئيلاً منها
(من الممكنات الهندسية) .

هذه الممكنات الهندسية كانت موضع اهتمام كثير من الرياضيين .
ولقد عكف الرياضي كلاين Klein على تنسيق الهندسات الممكنة منطقياً
بحيث تنتقل من هندسة إلى أخرى حسب مبدأ معين مستعيناً في ذلك بالنظرية
الجبرية المسماة نظرية المجموعات Theory of Groupes فانتهى إلى أن
عدد تلك الهندسات الممكنة منطقياً عدد لا ينتهي بالفعل وكل واحدة منها
تقوم على مسلماتها الخاصة بها . ولكن لم يدرس أحد من تلك الممكنات
الهندسية الكثيرة جداً إلا أقلها .

ومنذ ذلك العهد بدأ الهندسيون في القرن الماضي يتحدثون عن أو
ينظرون في خواص هندسية مجردة دون الاكتراث لمسألة اتفاقها أو عدم
اتفاقها مع عالمنا الواقعي أو الحقيقي ، كما بدت الهندسة علماً بتلك الخواص
الهندسية الممكنة لا علماً بخواص الموجودات حقيقية . ونحن نعلم
كم الفارق كبير بين الممكنات الفكرية وبين الوجود الواقعي . بدت الهندسة
إذن علماً بالخواص الهندسية الممكنة عقلاً لا علماً بالموجودات ، ذلك لأنهم
أمام هندسات عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا وليست واحدة منها
أحق من غيرها في الادعاء بأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقي أو الفعلي
كما كان الأمر عند الرياضيين في تصورهم لهندسة أفليدس قبل اكتشاف
الهندسات غير الأقليدية . وهكذا انحسرت أو تقلصت فكرة « الحقيقة »
(Verité) في الهندسة عن ميدان المطابقة بين قضايا الهندسة والعالم الواقعي
وانحصرت في فكرة « عدم التناقض » بين قضايا هندسة واحدة بعينها ،
أعني انحصرت في الإنسجام المنطقي لقضايا نسق هندسي ما فيما بينها .

وهذا تحول خطير في فكرة « الحقيقة » عامة والرياضية أو حتى العلمية خاصة . والرياضي تورينوس Taurinaus (المتوفي عام ١٨٧٤) عبر عن هذا بقوله :

« توجد في الهندسة حقيقة باطنة (Vérité Interne) وحقيقة خارجية (Vérité Externe) . والحقيقة الباطنة هي أن كل هندسة تؤلف نسقاً مغلقاً على نفسه (Système fermé en soi) منسجم القضايا ولا تناقض بينها بحيث لا نتساءل حينئذ عن امكان تطبيقها على الظواهر الخارجية ... ولكن إذا كان لا بد أن نتساءل هذا السؤال الأخير فحينئذ تنشأ مسألة الحقيقة الخارجية التي يصح أن تضاف إلى هندسة ما وتلك مسألة غير رياضية وتتجاوز حدود الرياضة » .

- (١١) -

خلاصة هذا أن مسألة « الحقيقة » التي يمكن أن ننسبها إلى قضايا هندسة ما أصبحت تعني فقط عدم تناقض تلك القضايا فيما بينها ولا تعني إطلاقاً المعنى القديم للحقيقة وهو مطابقة القضايا للواقع أو المكان الخارجي .
إن هذا التصور الجديد للحقيقة الرياضية طعنة نجلاء لنظرية كانط في الحدس المكاني (Intuition Spaciale) التي سيطرت طويلاً على الفكر الرياضي والتي رأت في هندسة أقليدس الهندسة « الوحيدة والضرورية » بسبب تعبيرها عن خواص المكان (Space) أو مطابقتها له . ولا فرق عندنا بين من يرى أن المكان قائم في العالم الخارجي كالواقعيين جملة وعلى رأسهم نيوتن وبين من يقول إن المكان من العناصر القبلية التي يشتمل عليها الذهن الإنساني وحده دون العالم الخارجي ككانط . إذ لا يهمنا هنا في الحقيقة

أن يكون المكان خارجياً بالنسبة للفكر الانساني أو قبلياً (Apriori) فيه وإنما يهمننا فقط أن نرى بوضوح كيف استقلت قضايا الهندسة عن المكان أياً كان ولم تعد تقاس الحقيقة فيها بمدى صلتها بالمكان أو مطابقتها له وإنما تقاس فقط بميزان منطقي صرف هو عدم تناقضها فيما بينها في داخل كل هندسة على حدة . هذا هو معنى الحقيقة الذي أدت إليه نشأة الهندسات وتطورها نتيجة لحركة النقد الباطني التي كانت المسلمة الأقليدية الخامسة نقطة الانطلاق فيها .

ومع ذلك لا بد لنا من أن نشير هنا إلى نظرية كانط في معنى الحقيقة الرياضية نظراً لمدى تأثير كانط الواسع في الفكر الفلسفي البحت وفي الفكر الرياضي أيضاً الذي فلسف أو أهتم بمسائل فلسفية كالتي نحن بصدددها هنا في أصول الرياضة . لقد أرادت الفلسفة النقدية بيان أن هندسة أقليدس — ولم يكن يُعرف غيرها في عصر كانط — هي الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث هي معبرة عن خواص المكان الوحيد المعطى لنا في حسنا أو فكرنا . وهي لكي تثبت تلك الضرورة المعبرة عن ذلك المكان الوحيد رأت أنه يكفيها أن تبرر كيف أن كل أحكام تلك الهندسة (بل الرياضة كلها) أحكام على حد اصطلاحه « تركيبية قبلية » .

أما أن أحكامها — أو بلغة الهندسة — نظرياتها هي تركيبية لا تحليلية فهذا يتضح من أنه في كل خطوة من خطواتها تثبت نظرية من النظريات صفة جديدة لموضوع هندسي معروف لم تكن لنصل إليها لمجرد تحليل الموضوع وحده ، ولكننا نضيفها إليه من خارجه ونركبها إليه تركيباً جديداً بواسطة ما نستدعيه من مسلمات أو نظريات سبق برهانها وما ننشئه من أعمال كمد خط أو استدارة مثلث على ساق أو غير ذلك . مثلاً لو أخذنا موضوع المثلث القائم الزاوية وحللناه ما وسعنا التحليل فلن نعر فيه كيف يكون المربع المقام

على التوتر يساوي مجموع المربعين المقامين على الساقين الآخرين . إذ لا بد من إنشاء الأعمال التي ترد الموضوع الحاضر إلى أشكال مألوفة في نظريات سابقة أو إلى المسلمات كما هو واضح من برهان فيثاغورس المعروف في كتب الهندسة ، فركب بذلك الصفة الجديدة ، أي المحمول ، إلى موضوعه . بعبارة أخرى كان لا بد أن نرجع إلى المكان الجديسي في ذهننا ونمارس نوعاً من التجربة الهندسية فيه التي تمثلها تلك الأعمال لكي نصل إلى هذا التركيب .

بقيت صفة القبليّة . فكون تلك الأحكام التركيبية هي أيضاً قبليّة أي سابقة على التجربة الخارجية بالحواس ، ومن ثم ضرورتها وكنيتها (لأن الضرورة والكلية تجملهما كلمة القبليّة) فذلك يتضح من أن المكان الذي ننشئ فيه الأعمال أو نجري فيه التجربة الرياضية الهندسية إنما هو مكان قبلي في ذهننا أو على الأصح في حساسيتنا ، فعلى خلاف نيوتن الذي وضع المكان في العالم الخارجي نجد كانط لكي يؤكد القبليّة في أحكام الرياضة يضعه في حساسيتنا كبنطانة لها فهذه مهياة بطبعها بصورتي المكان والزمان كشرطين صوريين مسبقين لتلقي كل إحساس خارجي أو باطني . فترجع بذلك قبليّة الأحكام التركيبية الرياضية إلى قبليّة صورتي الحساسية (المكان والزمان) . والمكان بصفة خاصة هو الشرط القبلي لقيام الأشكال الهندسية ، أما الزمان فهو الشرط القبلي لسلسلة الأعداد الطبيعية . والمكان فوق ما يبيحه من إقامة أعمال وأشكال هو الذي تعبر عن خواصه أو طبيعته المسلمات الأقليدية تلك المسلمات التي تستمد منها الهندسة قوتها ووجودها كعلم وثيق : فمن خواص ذلك المكان مثلاً مد خط إلى مالا نهاية . وهي المسلمة الرابعة (لأن المكان لا ينتهي) والمتوازيان لا يلتقيان (المسلمة الخامسة) ، والأبعاد ثلاثة (تعريف الجسميّة) والكل أكبر من الجزء ، إلى آخر ما هناك من خواص لهذا المكان القبلي الوحيد عبرت عن مجموعها المسلمات الأقليدية واستمدت منها ضرورتها التي لا سبيل إلى القول بغيرها

فتصبح تلك المسلمات ومن ورائها كل القضايا الهندسية قبلية ضرورية لأنها تعبر عن ذلك المكان القبلي الوحيد . وعلى هذا لا يمكن أن تقوم من وجهة نظر كانط هندسة أخرى غير الهندسة الأقليدية فهي الهندسة بالذات لأن ضرورتها مفروضة علينا بطبيعة تركيبنا الذهني (الحساسة) .

وها نحن نرى الآن كيف تنهار الفلسفة الرياضية عند كانط بعد أن عرفنا أن المكان ليس واحداً إذ هناك من الأمكنة ما أبعاده n (n فوق الثلاثة أبعاد) ، ثم بعد أن عرفنا أن الهندسة الأقليدية ليست إلا واحدة من عدد لا ينتهي من الممكنات الهندسية ، ثم أيضاً بعد أن عرفنا أن الحقيقة الهندسية تعني اتساق أو انسجام مجموعة من القضايا غير المتناقضة التي تستنبط من عدد من المسلمات ، ثم أخيراً بعد أن علمنا أن المسلمات تختلف من هندسة إلى أخرى ولا يصح أن ننسب إليها صفة الحقيقة بمعناها القديم أي المطابقة لخواص مكان ما لأننا لا نعلم أي مجموعة من المسلمات حقيقية بهذا المعنى وكل ما نستطيع أن ننسبه إلى كل مجموعة منها من معاني الحقيقة هي أنها مجموعة قادرة على تحمل عبء البرهان على عدد من القضايا المعينة دون تناقض بينها، وهذه هي « الحقيقة » التي تلازم كل « نسق إستنباطي فرضي » (système hyothético — deductive) كما سبق بيانه ، أي ما يسمى أخيراً بالأكسيوماتيك (Axiomatique) (راجع المقارنة بين نسق أقليدس والمحدثين فقرة ٩) .

— (١٢) —

كما قلنا ليس البحث في منهج الرياضيات هو دراسة لطرق حل المسائل الرياضية مسألة مسألة فذلك موضعه دروس الرياضيات . وإنما البحث في منهج

الرياضة هو بحث في الأصول أو الأسس أو المبادئ التي تستند إليها وتستمد منها قوتها . ولقد سبق أن عرضنا لموقف القدماء (أرسطو وأقليدس) من مسألة الأسس والأصول في الهندسة بالذات . ثم في مرحلة تالية بينا كيف أن الهندسيين المحدثين في القرن الماضي في إطار حركة نقد باطنية في الهندسة نفسها وانطلاقاً من المسلمة الأقليدية الخامسة تأدوا شيئاً فشيئاً إلى إدراك استقلالها عن غيرها من المسلمات وإلى اقتراح أكثر من بديل لها مما أدى بهم إلى هندسات غير متوقعة ، كما تساءلوا عن إمكان تغييرات أخرى في مسلمات غير المسلمة الخامسة ، وكان حصيلة هذا كله نشأة هندسات كثيرة غير أقليدية وغير قياسية ، وظهر معها تصور جديد للحقيقة الهندسية لا يمت بصلة إلى مطابقة المسلمات للمكان سواء أكان واقعياً وخارجياً أم كان قبلياً في الدهن . ولقد جعلنا عنوان هذا الفصل من النقد الباطني إلى الأكسيوماتيك الحديث وها نحن نصل الآن إلى الكلام عن هذا الأكسيوماتيك الذي هو بحث حول المسلمات نفسها من جهات كثيرة .

فلقد تبيننا فيما سبق أن عدداً يسيراً من الهندسات الممكنة كان موضع الدراسة عند الهندسيين المحدثين وهذه الدراسة تنحصر في تحديد مسلمات كل هندسة معينة من الهندسات وحصر القضايا أو النظريات التي ترتب عليها ويؤلف مجموعها موضوع تلك الهندسة : تلك هي الحركة التي عرفت في تاريخ الرياضة منذ الربع الأخير من القرن الماضي باسم الأكسيوماتيك (Axiomatique) أي مباحث تأسيس أو - إن أمكن التعبير - تأصيل الهندسة أي إرجاعها إلى أصول (حسب اصطلاح أقليدس في عنوان كتابه)

وقد افتتح الرياضي الألماني مورتز باش Pasch أبو الأكسيوماتيك الحديث تلك الحركة منذ عام ١٨٨٢ ثم أسهم فيها على غرار رياضيون

ومنطقيون كثيرون من معاصريه من أمثال بيانو Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو وتلاميذه الكثيرون ونخص بالذكر منهم فيلاتي Vailati وبييري Pieri وأنريكس Enriques ، ثم ديفيد هلبرت أستاذ الرياضيات بجامعة برلين ورياضيون من أمثال هلستد Halsted وفلبن Velben وغيرهم .

والبرنامج الذي افتتحه مورتر باش هو الذي عبر عنه بالفاظه الآتية :

« إذا كانت الهندسة تريد أن تقوم كعلم استنباطي فيجب أن يكون الاستنباط فيها مستقلاً عن المعنى المألوف للألفاظ الهندسية كالنقطة والخط والسطح الخ... كما يستقل كذلك عن الأشكال . وكل ما يجب أن يمحصر الدهن فيه عند الاستنباط هو العلاقات التي تقوم بين تلك الألفاظ والتي تعبر عنها المسلمات والتعريفات » .

ويفسر مورتر باش هذا التصور الاستنباطي الذي وصفه لنا في تلك الفقرة على النحو الآتي بالفاظه :

« الاستنباط الرياضي غرضه أولاً البرهان على خاصية جديدة لشيء هندسي ما ، وثانياً بيان العلاقة المنطقية بين القضايا . ولذا يجب ألا ينزلق أي خاطر ضمنى أعني أي فرض أو قضية حدسية (بديهية) أثناء البرهان إلى جوار المسلمات وما يترتب عليها من قضايا مستمدة منها . فالاستنباط الدقيق يجب أن يبرز فقط تسلسلاً منطقياً للقضايا كما أنه يجب أن يستمد كل قوته من المسلمات المصرح بها منذ البداية دون أدنى استعانة بأي حدس في أية صورة له كشكل مرسوم أو مسلمة نضمرها في أذهاننا أو قضية ندخلها خلصة على أنها بديهية . ومن ثم تجيء ضرورة كون الاستنباط صورياً (Formal) ورمزياً (Symbolic) معاً دون الاستعانة بالأشكال الهندسية كما هو مألوف في هندسة أقليدس تلك الأشكال التي رأى فيها كانط مبرراً لنظريته .

هذا وتلك الصورية (Formalism) يجب أن تمتد كذلك إلى المسلمات نفسها .

معنى هذا أننا في الهندسة لن ننظر بعد ذلك في أشكال وأعمال وإنمسا فقط في علاقات منطقية صرفة أو كما عبر هو في قضايا صورية ورمزية وتمتد هذه الصورية الرمزية لتشمل المسلمات أيضاً .

وهكذا نرى من هذا البرنامج الذي وضعه مورتز باش ومن تفسيره له كيف انتهى آخر الأمر ذلك النقد الباطني للهندسة، التي هي علم الأشكال الحسية، بالرياضيين أنفسهم من أمثال مورتز باش وتلاميذه إلى إغفال الأشكال وإلى تناول موضوعاتهم في ضوء العلم الصوري الرمزي الشقيق أعني علم المنطق، وهذا هو ما أدى بدوره إلى الإسراع بإصلاح المنطق نفسه وإخراجه من ركوده الطويل كعلم أشبه بعلوم اللغة وتحويله إلى علم رياضي ناضج ليقوم بدوره الجديد الذي أصبح جوهرياً بالنسبة إلى تأسيس وتأصيل الرياضة على نحو يستبعد معاني الألفاظ الهندسية والأشكال الحسية ويستبقي رموزاً صورية وعلاقات منطقية فحسب .

هذا الجانب من تطور المنطق الصوري ليقوم بدوره الهام في تأسيس الرياضة سنفرد له بحثاً لاحقاً (أنظر فقرة ٢٣) ولنعد إلى برنامج مورتز باش . فهذا المؤلف الذي لخصنا برنامجه بضع القاعدتين الآتين لتأسيس المسلمات في النسق الاستنباطي الهندسي .

(١) يجب النص صراحة (Explicitement) عن التصورات والألفاظ الابتدائية (Concepts Primitifs) التي بواسطتها سنعرف كل التصورات أو الألفاظ المشتقة (Derivés) الواردة في هندسة ما .

(٢) يجب النص صراحة عن القضايا الابتدائية (وهي المسلمات)

التي بواسطتها سترهن القضايا المشتقة (التي هي النظريات) في كل هندسة معينة . وتلك القضايا الابتدائية يجب أن تعبر فقط عن العلاقات المنطقية الصرفة التي توجد بين التصورات الابتدائية المقبولة ، كما يجب أن تكون مستقلة عن المعاني المعتادة في القاموس لتلك التصورات (لأن تلك المعاني أشياء حدسية وشخصية تعيق الاستنباط الصوري) البحث .

مثال واحد يكفي لبيان كيفية تطبيق ومراعاة القاعدتين السالفتين :
إذا افترضنا أننا نعرف معاني النقطة والخط والسطح ، يمكننا أن نضع المسلمة الآتية :

« إن أي نقطتين في سطح ما إنما تتصلان معاً بمستقيم معين يحتويه بخذافيه ذلك السطح » .

فإذا فرضنا الآن أن كلاً من المستقيم والسطح عبارة عن « طائفة » (Class) من النقط فإنه يمكننا أن نترجم تلك المسلمة بعلاقات منطقية صرفة كعلاقتي « الانتماء » (Appartenance) « والاحتواء » (Inclusion) وتصور منطقي مثل « الطائفة » فنقول مثلاً في تلك الترجمة المنطقية الصرفة :
« إن نقطتين ما مما « ينتمي » إلى الطائفة « سطح » « ينتميان » أيضاً إلى الطائفة « مستقيم » كما أن العناصر التي تؤلف « المستقيم » « محتواة » في عناصر « السطح » .

وهنا نلاحظ أن الألفاظ نقطة ومستقيم وسطح فقدت معانيها العادية المألوفة في القواميس أعني أنها فقدت صفة كونها حدوداً هندسية أي أشكالاً مكانية لها صلة بالمكان ، وحل محل تلك المعاني التصور المنطقي « طائفة » (Classe) . فعندنا الآن من جهة ثلاث طوائف مختلفة (النقطتان . الخط . السطح) ومن جهة أخرى العلاقات المنطقية القائمة بينها وهي (الانتماء »

« والاحتواء ». وعلى هذا النحو لو عبرنا عن تلك الألفاظ وعن علاقاتها أيضاً برموز جبرية بعضها متغير (Variable) وبعضها ثابت (Constant) كما في الرياضيات نجد أنفسنا آخر الأمر أمام قضايا منطقية صرفة لا توحى بأشكال هندسية ما إذ هي مستبعدة تماماً هنا . وهكذا تبدو أهمية دور المنطق في ثوبه الرياضي الحديد بالنسبة للعلوم الرياضية .

ولقد حلدا كثيرون كما قلنا حلوا مورتز باش في تضرره الأكسيوماتيكي (أو التأسيسي) للهندسة، وعمموا طريقته في تناول الهندسة في صورها المختلفة أعني في تأسيس كل الهندسات على أصول ومسلّمات مبتكرة . وبروح كالتى حدث بالفيلسوف والرياضي لينتز أن يبرهن كل قضية رياضية وحتى المسلّمات نفسها لأنه يرفض البدايات كعلامة لصدق المسلمة عكس هؤلاء الرياضيون على تنقية الهندسة من المسلّمات التي قبلها القدماء بسبب وضوحها الحدسي أعني بسبب بدايتها لصلتها بالمكان ، وكذلك على البحث عن مسلّمات أخرى أكثر بساطة تلقى ضوءاً على مسلّمات القدماء البدئية أو تنتجها . ويمكن تلخيص اتجاهاتهم في مباحثهم الخاصة بتأسيس الهندسات في النقاط الأساسية الآتية :

١- البحث عن كل مسلمة مضمرة (Postulat implicit) والنص عليها صراحة (بدلاً من استعمالها ضمناً وإدخالها في البراهين خلسة) وذلك بالنسبة إلى كل هندسة على حدة : مثلاً فيما يختص بهندسة أقليدس بين مورتز باش أنها تضمّر مسلّمات الترتيب (Ordre) التي لم ينص عليها أقليدس . كما بين هنري بوانكاريه كذلك أنها فاقدة أيضاً لمسلّمات النقلة (Displacement) .

٢- تكوين نسق « كامل » (Système Complet) لمسلّمات كل هندسة

على حدة : مثلاً كوتن ديفيد هلبيرت D. Hilbert عشرين مسلمة
لهندسة أقليدس (وهي طبعاً تختلف عن مسلمات أقليدس نفسه) .
كما كوتن بيانو ١٨ مسلمة للهندسة الوصفية (Géom. Descriptive) ، ومباريو
بييري Pieri ٢١ مسلمة للهندسة الإسقاطية (Géom. Projective) وهكذا .
٣- الاجتهاد في الاقتصاد في عدد المسلمات بأن ترد مسلمات كل
هندسة إلى أقل عدد ممكن : مثلاً استطاع انريكس Enriques أن يرد
المسلمات الإحدى والعشرين المقبولة عند بييري بالنسبة للهندسة الإسقاطية
إلى تسع مسلمات فقط . وهذا الاقتصاد في المسلمات لحق أيضاً التصورات أو
الألفاظ الابتدائية التي تعرف في أول النسق كما سنبينه فيما بعد .

٤- العمل على أن تكون المسلمات غير مستمدة من الحدس المكاني
كما أراد القدماء وإنما عبارة عن علاقات منطقية كما بين باش . مثلاً يستعمل
ديفيد هلبيرت علاقتي « الاشتمال » (Appartenance) أو « التطابق »
(Congruence) . ثم أن تلك العلاقات المنطقية إنما تقوم كما بين باش بين
عناصر أو تصورات ابتدائية تختار اختياراً عسفاً أو تحكيمياً (Arbitraire)
كما تمليه إرادة الباحث . قليلة العدد وتجرد من من معانيها الحدسية المكانية
المألوفة في القاموس وينظر إليها كما لو كانت كائنات أو خصائص صورية
بجته لا صلة لها بعالمنا الواقعي ولا معنى لها غير ما تحدده لها العلاقات المنطقية
من معنى تقدمه على هيئة مسلمات أذ المسلمات هي التي تحدد معنى الحدود
الابتدائية وذلك ببيان كيفية استعمال تلك الحدود . مثلاً لهندسة أقليدس
اختار هلبيرت النقطة والمستقيم والسطح حدوداً أولية ، واختار فايل Weyl
النقطة والمتجه الحر (Vecteur libre) وبوانكاريه النقطة والنقطة ،
وبييري النقطة والمسافة بين نقطتين . في كل هذه الحالات الاختيار تحكيمي عسفي
وفق إرادة الباحث ولا يوجهه سوى إهتمام الباحث بفكرة دون أخرى .

هـ - إذا تم هذا التأسيس الصوري للمسلمات بالشروط المذكورة آنفاً يعمل الرياضي على أن يستنبط بقوة المنطق وحده أي دون الالتجاء إلى الحدس (كالاشكال المرسومة أو حتى المتخيلة) أو إلى أية مسلمة جديدة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الابتدائية، أن يستنبط قضايا أو نظريات الهندسة التي هي موضع النظر.

هكذا عدل الرياضيون (الذين عملوا على تأسيس الهندسات على تلك الأسس الصورية المنطقية) عن الأشكال والأعمال إلى النظر في مجرد علاقات منطقية صرفة. بهذه المناسبة أنه إلى أن العدول عن البراهين الهندسية المعتمدة على الأشكال وأنشاء الأعمال التي أسهب المناطقة الكانطيون في الحديث عنها تحت اسم التركيب (Construction, Synthèse) والأحكام التركيبية والتي لا يزال بعض المنطقيين يرى أنها سر المنهج الرياضي ولبه، هذا العدول لم يفهمه بعض المنطقيين المحدثين من أمثال جوبلو Goblou في كتابه Traité de logique الذي اشتهر في فترة ما بين الحربين وهو من المجددين لكانط ولمذهبه في أسس الرياضة ويردد صدى كانط على نحو يختلف بعض الشيء حين يذهب إلى أن الاستنباط هو التركيب (Deduire c'est construire) أعني أن الاستنباط الرياضي أو المنهج إنما يقوم في جوهره على تركيب أشكال جديدة ترد النظرية موضع النظر إلى أشكال سبقت معرفتها وذلك بواسطة الأعمال (Constructions) وهذا هو البرهان الرياضي عنده. وهكذا كما يقول المنطقي Nicod مواطن جوبلو وناقده «بينما لا يزال الفلاسفة الناظرون في البرهان الرياضي يتأملون صفة زائدة وخارجة على صفات ذلك البرهان، فإن الرياضيين أنفسهم قضوا على تلك الصفة لأنهم يرون في الالتجاء إلى الحدس علامة لفجوة أو ثغرة يدخل منها مبدأ أو قضية مفسرة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الأولية ولا تسمح

باستنباطها وهم يحاولون التعبير عن تلك القضية المضمرة في هيئة حدسية ما .

— (١٣) —

إن الذي وصلنا إليه في هذه المرحلة الخاصة بأكسيوماتيك الهندسة هو أن أصحاب هذا العلم الباحثين في أسسه ومبادئه قد افقدوا الألفاظ الهندسية المستعملة في بداية كل نسق استنباطي هندسي معانيها الحدسية أو المكانية المذكورة في القاموس والتي يمكن أن ترسم في أشكال كما حولوا المسلمات الهندسية الحدسية (الدالة على أشكال في المكان) إلى مجرد علاقات منطقية . ونريد الآن أن نواصل بيان هذا الموقف الجديد على نحو آخر يختلف بعض الشيء عما تقدم وإن كان يلقي عليه كل الضوء ، وذلك بالوقوف قليلاً عند اقتراح عجيب لهنري بوانكاريه Poincaré ثم نتابع الكلام فيما بعد عن الشروط المنطقية لإقامة الأكسيوماتيك .

الواقع إن خلاصة ما فرغنا آنفاً من بيانه هو أن كل أكسيوماتيك ، بالمعنى الحديث يصل إلى درجة من التجرد والعموم والبعد عن الأشكال الحدسية بحيث أنه لا يأخذ معنى أقليدياً أو ريمانياً أو حتى هندسياً أو عددياً أو غير ذلك إلا عند تفسير حدوده الأولية كأن نلصق بها معنى ريمانياً أو معنى أقليدياً أو غير ذلك . وهذا هو الذي وضحه هنري بوانكاريه بطريقته الخاصة التي تختلف عما سبق بيانه ولكنها تبين بكل تأكيد كيف أن الأكسيوماتيك الحديث أفقد الهندسات معانيها الهندسية المألوفة ، وذلك باقتراحه في كتابه العلم والفرض (ص ٥٦ - ٥٨) تأليف قاموس هندسي يعطي كل المفاهيم الهندسية الممكنة لكل لفظ أو حد من الحدود الأولية ، والمسلمات المستعملة في كل أكسيوماتيك . وهذا القاموس ييسر ترجمة مسلمات هندسة ما إذا هندسة أخرى وكذلك القضايا أو النظريات المترتبة عليها . كما نلاحظ أيضاً

ترجمة مسلمات هندسة واحدة بالذات إلى هندسات مختلفة . ومن أمثلة هذا القاموس عند بوانكاريه : ما يأتي :

« المكان ... جزء من المكان يوجد فوق السطح الأساسي .

السطح ... كرة تقطع عمودياً السطح الأساسي .

المستقيم ... دائرة تقطع عمودياً السطح الأساسي .

الكرة ... الكرة .

الدائرة ... الدائرة .

الزاوية ... الزاوية .

الخ « »

يقول بوانكاريه إنه يمثل هذا القاموس يمكن أن نترجم نظريات لوباتشفسكي إلى لغة أقليدية والعكس بالعكس ، تماماً كما نترجم نصاً ألمانياً إلى الفرنسية ، والعكس بالعكس بواسطة قاموس ألماني فرنسي ، ويمكن تأليف قواميس مشابهة أخرى .

هذا الاقتراح الذي جاء به بوانكاريه يؤكد مرة أخرى أن الهندسة عند الأكسيوماتيكيين المحدثين أصبحت شيئاً مجرداً وصورياً ، أي بعيداً كل البعد عن حدس المكان في أي صورة له . وهكذا نتقل من هذه النقطة إلى بيان الشروط المنطقية أو الصورية التي يجب أن تتوافر في إقامة نسق أكسيوماتيكي من هذا النوع .

-(١٤)-

لقد تبينا فيما تقدم أن المسلمات في الأكسيوماتيك الحديث كما وضع مورتر باش تتكون من علاقات منطقية بين حدود أولية كالنقطة والخط

والحركة الخ ... ، قليلة في عددها ، وتختار اختياراً عسفياً وفق وجهة نظر الباحث ، كما تجرد عن معانيها الهندسية أو الهندسية ، وتتصور كمعان منطقية. هذا الجانب الصوري من الأبحاث المتعلقة بأسس الرياضة وطرقها أثار مسألة منطقية أخرى هي الشروط المنطقية التي يجب أن تتوافر في تأسيس أو اختيار المسلمات . ومن ثم فنحن ننتهي الآن إلى أن ندرس في اختصار الشروط المنطقية التي يجب أن تراعى عند تأسيس الأكسيوماتيك وهي على الترتيب :

(١) استقلال كل مسلمة عن الأخرى .

(٢) عدم تناقض المسلمات .

(٣) الشرط الذي سماه هلبرت شرط « الإشباع » (Saturation) أي كون عدد المسلمات الخاصة بهندسة ما هو ما يكفي بالضبط لاستنباط نظريات تلك الهندسة بحيث لا يمكن زيادتها أو نقصانها إلا وأدى ذلك إلى قضايا هندسة مخالفة .

نريد الآن أن نتناول كل شرط من تلك الشروط على حدة . لقد تنبه أصحاب الهندسات غير الأقليدية في القرن الماضي إلى بعض هذه الشروط عندما بين ريمان مثلاً أن نفي المسلمة الخامسة يؤدي إلى هندسة منسقة القضايا غير أقليدية . ومن قبل هؤلاء في القرن السابع عشر تنبه الفيلسوف الرياضي المنطقي لينتز إلى بعضها مثل شرط عدم التناقض : فإن لينتز كان يطمح في برهان كل قضية ممكنة وحتى المسلمات الرياضية — لكي لا يقبل قضية من غير برهان — وذلك بأن يردّها إلى الهوية أي الذاتية (Identité) ببيان أن محمولها لا يتناقض وموضوعها . وإنما يتأتى هذا بأن يجد تصور المحمول مكاناً طبيعياً ومنطقياً في تصور الموضوع فيكون بذلك جزءاً من هويته أو ذاتيته . ويتضح من ذلك أن لينتز لم يكن يقصد عدم

تناقض مسلمة مع أخرى وإنما كان يقصد عدم تناقض مسلمة بعينها في ذاتها أو مع ذاتها .

أما الأكسيوماتيك الحديث فإنه لا يُعني بمسألة حقيقة المسلمة في ذاتها لأنه لا يعني بمسلمة مفردة كما كان يفعل لينتز وإنما يُعني بطائفة من المسلمات مجتمعة معاً لتأسيس نظرية رياضية واحدة ، ومن ثم كانت مسألة إلتزام تلك المسلمات معاً ، أي عدم تناقضها فيما بينها ، هي المسألة المنطقية الأولى والهامة في إقامة النسق الأكسيوماتيكي . ولكن كيف نعرف أن طائفة من المسلمات غير متناقضة فيما بينها ؟ هذه مسألة عسيرة جداً كما بينت دراستها ، فإن هلبرت يعرف عدم التناقض بقوله إنه « استحالة إستنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات أي تكون نفيّاً كلياً أو جزئياً لإحدى المسلمات » . وإذن لا يمكن البرهان مباشرة على عدم تناقض المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريق غير مباشر وهو عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفيّاً لإحداها . وواضح أن مثل هذا البرهان غير أكيد ولا حاسم لأننا إذا كنا لا نعثر في الحالة الحاضرة لطائفة من المسلمات الخاصة بنظرية رياضية ما أية قضية مستنبطة منها تكون متناقضة معها فإننا لا نستطيع أن نجزم باستحالة ذلك في مستقبل قريب أو بعيد .

مثل هذا الاعتراض جعل هلبرت يفكر في طريقة أخرى مباشرة للبرهان على عدم تناقض طائفة من المسلمات فيما بينها وهذه الطريقة هي أن نعطي للمسلمات تفسيراً مشخصاً في هذا العالم فنيين أنه توجد أشياء في عالمنا هذا تنطبق عليها المسلمات . وهذا التفسير هو الكفيل في رأيه بعدم تناقضها . وأفضل التفسيرات الممكنة عنده التفسير العددي ، لأن الأعداد كما يقول نموذج اليقين عند الرياضيين وبها يقيسون صحة كل قضاياهم .

إن هذا الأسلوب في تفسير المسلمات بالأعداد للتحقق من عدم تناقضها

ليس غريباً على كل من حاول حل مسألة جبرية وأراد أن يتحقق من صحة النتيجة باستبدال الحروف بالأعداد .

هناك بالطبع اعتراض جوهري على ما ظنه هلبرت طريقاً مباشراً للبرهان بقبوله تفسيراً عددياً للمسلمات وهو أن الأعداد نفسها جزء من أهم أجزاء الرياضيات التي يراد تأسيسها كلها على أسس أكسيوماتيكية فكيف تتخذ معياراً أو محكاً لليقين بعدم تناقض المسلمات في أي فرع من فروع الرياضة ؟ أليست الأعداد نفسها في حاجة إلى مسلمات ؟ ألم يعرف التاريخ القريب محاولات مختلفة لإقامة مسلمات تنتج الأعداد ؟ إذن يجب أيضاً استبعاد التفسير بالأعداد كبرهان على عدم تناقض المسلمات .

على كل حال يبدو أنه لا يوجد إلى الآن أي طريق مباشر للبرهان بيقين على عدم تناقض المسلمات ، والباب مفتوح أمام مزيد من البحث .

هذا وشرط عدم التناقض عند هلبرت شرط متضمن في الشرطين الآخرين : الاستقلال والإشباع . فإن هلبرت يقول إن مسلمة ما تعتبر « مستقلة » عن المسلمات الأخرى إذا كان نفيها يؤلف مع هذه المسلمات الأخرى مجموعة غير متناقضة . (لتذكر المسلمة الخامسة عند ريمان فهي نفي للمسلمة الخامسة عند أقليدس) . ويقول هلبرت إن طائفة من المسلمات تصل إلى درجة « الإشباع » إذا كانت إضافة أية مسلمة جديدة تؤدي إلى جعل تلك الطائفة متناقضة .

لنمتحن عن قرب فكرة الاستقلال : هي فكرة عرفها أصحاب الهندسات غير الأقليدية ، فهم عند محاولتهم البرهان على المسلمة الخامسة توصلوا إلى اكتشاف استقلالها عن غيرها من المسلمات الخاصة بالمستقيم والسطح والتطابق وغير ذلك مما يسمح ببرهان الثماني والعشرين نظرية الأولى في

أقليدس دون ما يليها مما يحتاج إلى المسلمة الخامسة . فأدركوا عندئذ أن برهان استقلال المسلمة س عن المجموعة ص إنما معناه عدم تناقض ص مع لا س . وهذا هو ما أدى إلى هندسة ريمان مثلاً . ومنه أخذ هلبرت تعريف استقلال المسلمة . هذا هو رأي هلبرت في معنى استقلال المسلمة .

ولكن يعترض بعض الرياضيين على فكرة الاستقلال نفسها فيقولون إذا كانت كل مسلمة مستقلة حقاً في معناها عن غيرها في طائفة من المسلمات فإنه يمتنع الاستنباط بسبب عدم الاشتراك أو الاتصال بين معاني مسلمات الطائفة المذكورة . وإذن فلا بد أن يكون هناك اشتراك ما — لا استقلال أو انفصال تام — بين طائفة من المسلمات بحيث يمكن استنباط قضايا أو نظريات منها . وهذا الاشتراك ربما أمكن فهمه في ضوء التمييز الذي ذهب إليه الرياضي الإيطالي بيو ليفي (Beppo Levi) بين الاستقلال المطلق والاستقلال المرتب (Independ. Ordonné) أما الاستقلال المطلق فمستحيل معه الاستنباط لأن المسلمات تكون حينئذ غير مشتركة في شيء ما ، أما الاستقلال المرتب فهو الذي إذا توافر لدينا ا ب ج كطائفة من المسلمات لنظرية ما ، يريد ببساطة أن يقول إن ب لا تنتج عن أ وإن ج لا تنتج عن ب أي أن هناك ترتيباً في الاستقلال كما هو واضح . وهذا لا يمنع بالطبع إمكان استنباط أ من ب و ح معاً ، ومثل هذا هو ما يسمح بالاشتراك بعض الشيء في المعنى .

على كل حال يبدو أن الاستقلال خاصية نسبية واقتصادية وجمالية في آن واحد أكثر منها خاصية حقيقية أو منطقية أو أي شيء آخر من هذا القبيل . أما أنها نسبية فلأنه لا يمكن أن يكون هناك استقلال مطلق لما يؤدي إليه مثل هذا الاستقلال من امتناع الاشتراك في المعنى مع بقية مسلمات الطائفة . أما أنها اقتصادية فلأنه من الاقتصاد الفكري أن لا تكرر مسلمة

شيئاً مما تقوله الأخرى فيكون هناك الحد الأدنى فقط من المسلمات . أما أنها قيمة جمالية بالإضافة إلى ذلك فيرجع إلى أن في الاقتصاد جمالاً وأناقة كما في استقلال المسلمة إستقلالاً نسبياً كذلك . على كل حال ليس هناك رأي حاسم في هذا الشرط .

بقي الإشباع وهو أقل الشروط حظوة في مناقشات هلبرت . وأول معانيه عنده هو أن طائفة معينة من المسلمات تكفي بمفردها بالقيام بمهمة استنباط قضايا أو نظريات فرع معين من فروع الرياضة . ثم توسع هلبرت بعد ذلك في معناه بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار في داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها . وتحديد هذه الفكرة عسير بعض الشيء ولكن يمكن القول بأنه يريد أن يقول إن فرعاً رياضياً ما إنما تصل مسلماته إلى درجة الإشباع إذا تعذر لقضية ولنقيضها معاً أن ينتجا في آن واحد عن المسلمات . على كل حال لا تزال مسألة الاشباع موضع نقاش مفتوح لدى الرياضيين .

نرى من هذا أن الشروط الثلاثة وهي عدم التناقض والإستقلال والإشباع متصلة متداخلة فيما بينها وأنها لا تزال موضع نظر من قبل من يهمهم الأمر بحيث يعسر أن يبت فيها بكلمة نهائية وفاصلة من وجهة نظر الرياضيين أصحاب الشأن .

والآن بعد هذه الجولة في تصميم الأبحاث الخاصة بتأسيس الهندسة لا نقول إننا استنفدنا كل ما يمكن أن يقال عن هذه المسألة من تفاصيل كثيرة من وجهة نظر المناهج . ولكنني أعتقد أنني جلوت الكثير مما غمض من مسائل ، وروضت الكثير مما يستعصي فهمه إلا على الرياضيين . وبينت أن المطلوب الأول في فلسفة الرياضة الإحاطة بالأسس البعيدة التي تستند إليها الهندسات ، كما بينت

الفارق بين موقف القدماء وموقف المحدثين ، وأن موقف المحدثين الذي سماه المنطقة النسق الاستنباطي الفرضي إنما درسناه تحت الاسم المفضل عند الرياضيين وهو الأكسيوماتيك، وبينت كيف أن الحركة الأكسيوماتيكية التي تميزت باتجاهات عديدة إنما ثمرتها الأخيرة الحاسمة إبتعاد الهندسات عن الحدوس المكانية والبراهين المستندة إليها مع إلتهامها إلتهاماً وثيقاً بالمنطق الصوري وحده بحيث أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية بالغة التجريد والبعد عن الأشكال المكانية إلى حد أن رياضياً مثل بوانكاريه أقترح قواميس للمسلمات والحدود الأولية لإمكان ترجمة هندسة إلى أخرى ، وبينت في خاتمة المطاف الشروط المنطقية لإقامة نسق من المسلمات المنطقية المجردة على ذلك النحو، تلك الشروط التي ما كانت توجد وتوضع موضع البحث لولا أن أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية صرفة . ومن كل هذا يتضح أننا عندما نبحث في منهج الهندسة فمعنى ذلك أننا نوّسّسها كنسق استنباطي على مسلمات لا تمت للواقع الخارجي بصلة وإنما فقط إلى المنطق الصوري وحده. وهذا ما يضيء فكرة الحقيقة الهندسية بضوء جديد في إطار نظرية عامة للمعرفة الرياضية مؤداها أن التصورات الرياضية تصورات من طبيعة منطقية أو صورية بحتة .

الفصل الخامس

تحسب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

- (١٥) الجبر والهندسة التحليلية . (١٦) النقد الباطني في التحليل
يتتهي إلى نية فكرة «الاتصال الهندسي» ويستفيض عنها بالأعداد.
(١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسب الرياضة . (١٨) برنامج
المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية إلى الأعداد الصحيحة .
(١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة . (٢٠) نظرية
الأعداد اللامنتهية دعم للمذهب الحسابي . (٢١) أكسيوماتيك العدد.

- (١٥) -

إن ألفاظ هذا العنوان ستضح فيما بعد . ونبدأ الآن من القول بأن
الخطوات التي تتبعناها من النقد الداخلي إلى الأكسيوماتيك الحديث في الهندسة
يمكن أن نتبع مثيلتها في علم « التحليل » (Analyse) .

لقد كان ديوفانت Diophante الرياضي الإسكندري صاحب
الكتاب المعروف باسم « ارمطيقا » (Arithmetique) أي الحساب ،
أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما إلى كميات أخرى معلومة .
ولكنه وقف في معالجته لمثل هذه الفكرة (التي أثمرت الجبر) عند الطرق

الطوائف المنطقة Classes والعلاقات التي تقوم بينها مما سبقت الإشارة إليه (فقرة ١٢) . وهذا هو بالضبط الطريق الذي ينتظر التحليل أيضاً منذ ثورته على حدس الاتصال . ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى .

فلنعد إلى كلمة ديرشليه : إن مغزاها هو أن علماء التحليل في مرحلة تنقية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التي يقوم عليها علمهم ناقدين وفاحصين ، على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم يتجهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائماً الاتجاه الآخر والطبيعي أعني ناحية تنمية علمهم بالاكتشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة ليتنهض بتبعاته خيال تقدم العلوم الطبيعية . وذلك الاتجاه الجديدي النقدي الفاحص للأسس والمبادئ أمد الرياضة القائمة فعلاً بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الاتجاه الآخر الذي يمدّها بالمزيد من أنواع الحساب . وهذا هو مغزى عبارة ديرشليه التي ستوسع فيما يلي في تفصيلها وفهمها .

-(١٧)-

إن الاتجاه الجديدي الذي عبر عنه ديرشليه أحسن تعبير أصبح مفروضاً أو محتوماً على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة الى ميدان العدد التخيلي Imaginary number أى المركب Comeplex .

لقد قيل إن كوشي Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعني من الأعداد التخيلية أو المركبة . والواقع أن إحدى مفاخره في الرياضة أنه وسع من أفق نظرية الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثيها عدد تخيلي وأسمّاها الدالة التحليلية Fonction Analytique

لقد كان العدد التخيلي معروفاً من قبله : فقد أسماه ديكارت بهذا الاسم

والمقابلة « ليدل بهما على طريقتين خاصتين باستخلاص المجهول : واللفظ الأول الذي قدر له الخلود كما يؤخذ من معناه في اللغة العربية هو أن يجبر أو يكمل كل طرف من طرفي المعادلة وذلك بأن تنتقل المقادير الناقصة من طرف إلى آخر بالزيادة فلا تبقى في الطرفين غير الأعداد بالزيادة . وأما المقابلة فهي طريقة أخرى تقوم على حذف المقادير المتماثلة أي « المتقابلة » في طرفي المعادلة . وهاتان طريقتان توقف قيام الجبر على استخلاصهما ومراعاتهما ويغنيان عن البراهين الهندسية .

ولكن الخوارزمي كان « يتكلم » الجبر أيضاً لأنه لم يهتد إلى الرموز الهجائية . لذلك يقترن الجبر في العصر الحديث باسم مكتشف آخر هو الرياضي الفرنسي فيت Viète الذي عاش قبيل ديكارت بنحو نصف قرن فهو أول من خلص تلك الطريقة من استعمال ألفاظ اللغة وحتى من أعداد الحساب حين استعمل حروف الهجاء للدلالة على الأعداد وحين أدخل بعض العلامات الدالة على العمليات التي تجري على تلك الحروف . فأثمر ذلك كله أنه ميز عما كان يسمى حينئذ Logistica Numerosa أي حساب العدد وهو علم الحساب ، العلم الآخر المسمى Logistica Speciosa أي علم الأنواع (باعتبار أن الحرف الهجائي بمثابة نوع لأعداد غفيرة) أعني علم الجبر والرمز ، وارتفع بهذا الأخير إلى مرتبة من التجريد والعموم لا تعهد في الحساب العددي واتضحت بذلك قوانين أو علاقات بين المقادير العامة بطريق المعادلة لم تكن ميسورة في حساب الأعداد مثل قانون الاقتران (Law of association) الخاص باختلاف اقتران الحدود داخل الأقواس بحيث لا تتغير القيمة التي يشير إليها طرفا المعادلة كما في :

$$(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)$$

وكذلك مثل قانون التوزيع Law of Distribution الخاص بالتوزيع بين الجمع والضرب كما في :

$$(أ + ب) (ج + د) = أ ج + أ د + ب ج + ب د$$

ولكن جبر فيت سرعان ما توقف أمام عقبات جاءت من اقتران الجبر والعمليات الجبرية في ذهنه بالأشكال الهندسية التي لم يستطع فيت التخلص منها . وفي هذا يقول الرياضي برنجشيم Pringsheim في دائرة المعارف الرياضية التي ظهرت تحت إشراف الرياضي مولك Molk باللغة الفرنسية في أوائل القرن العشرين والتي استعرضت أجزاء الرياضيات كلها سلسلة مرتبة ، يقول (في المجلد الأول ص ٤٠) : « إن فيت هو الذي علمنا كيف نحسب بالحروف الدالة على الأبعاد دون أن نخرج عن حدود النظر في الحروف نفسها . وذلك باستعمال رمز خاص يسمح بأن نطبق العمليات الرياضية على الحروف كما لو كانت الحروف ممثلة لأعداد معينة . ثم إن فيت هو صاحب الفكرة في تجديد طريقة القدماء [الإشارة إلى طريقة ديوفانت] وذلك بإذابتها في الجبر الجديد . ولكن فيت وقف مع ذلك في منتصف الطريق عند خطواته الأولى وذلك لأنه لم يعرف كيف يتخلص على نحو كاف من التفسير الهندسي للعبارات الجبرية ذلك التفسير الذي كان مألوفاً عند القدماء : فهو عندما جعل حرف أ مثلاً في مقابل خط مستقيم ، بدا له أن يجعل (أ . أ) مثلاً في مقابل المربع و (أ . أ . أ) في مقابل المكعب ... هذه المقابلات منعه من أن يعطي للعلم الذي بعثه وجدده كل ما هو جدير به من صفة العموم والتجريد » .

هذه الفقرة المقتطفة من كلام برنجشيم التي تبين فضل فيت في إدخال الحروف الجبرية وأيضاً في استعمال رموز للعمليات وبذلك أستقام له الجبر كعلم . تبين في الوقت عينه لم توقف فيت عند خطواته الأولى نتيجة لاقتران

هذه الحروف والعمليات التي تجري عليها بأشكال هندسية تقابلها بالضرورة بما حد من قدرة هذا العلم عند مالا توجد أشكال هندسية لأعداد أو عمليات مثل أ^١ اذ الخيال يعجز أن يجد شكلاً هندسياً بعد المكعب المعبر عنه بالعدد أ^٢ أو (أ . أ . أ) . إن هذه الفقرة التي تبين عدم استطاعة فيث التخلص من الهندسة حين كان يفكر جبراً هي فقرة هامة جداً من وجهة نظر أبحاثنا القادمة لأنها تبين كيف أن الجبر أو علم التحليل كله لا يمكن أن يتقدم إلى الأمام إلا إذا تخلص نهائياً عند تأمل رموزه، حروفاً وعمليات، من النظر في أشكال هندسية، أي عندما يتخلص من « حدس المكان » كما يصطلح كانط الذي سبق أن عرضنا نظريته وأثرها في الفكر الحديث فيما يختص بأسس الرياضيات .

وفي الواقع إنما يرجع الفضل في تخليص الجبر من العوائق الهندسية إلى ربنيه ديكارت في اكتشافه للهندسة التحليلية التي حولت الرياضيات الحديثة كلها من النظر في أشكال مكانية إلى النظر في التحليل الذي هو تنسيق عام لكل العلاقات الموجودة بين المقادير أيما كان نوعها فأحل ديكارت التحليل بذلك المحل الأول في الرياضيات الحديثة وتراجعت الهندسة من مكانتها القديمة في الريادة أو القيادة للفكر الرياضي . ونقطة البدء في هندسة ديكارت هي التي عبر عنها في أوائل كتابه المسمى « الهندسة » حيث يقول : « كل مسائل الهندسة يمكن أن يعبر عنها على نحو يكفي معه أن نعرف عدداً معيناً من الخطوط المستقيمة لكي نحصل على التركيب المطلوب الحصول عليه . وكما أن الحساب يُرد إلى أربع أو خمس عمليات فكذلك الهندسة تُرد بالمثل إلى العمليات نفسها نجريها على خطوط مستقيمة ينظر إليها كأنها أعداد فحسب . وعلى هذا فإذا كان أ و ب يمثلان خطين مستقيمين فإن أ + أ أو أ × أ لا يمثلان مستطيلاً أو مربعاً وإنما خطأ مستقيماً نسبته إلى أ كنسبة ب إلى الوحدة (وحدة القياس) . وكذلك العوامل والجذور والأسس فإنها تمثل

جميعها. خطوطاً مستقيمة . وبالجملة نتائج العمليات هي دائماً مستقيمات». وهكذا لم تعد الهندسة تلعب دوراً جبرياً كما هو الشأن في تصور فيت ، ولكن لا يمنع هذا من استعمال العبارات الهندسية الدارجة مثل مربع ومكعب وغير ذلك للتعبير عن رموز جبرية مثل 1^2 و 2^2 الخ ... على شريطة ألا نفهم من هذا التعبير إلا خطوطاً مستقيمة فحسب كما يريد ديكارت .

إن هذا الرأي الذي عبر عنه ديكارت في أوائل كتابه « الهندسة » هو من وجهة نظر تاريخ الرياضيات أكثر ثورية مما يبدو للنظرة العادية ذلك لأنه استبعد كل الأشكال الهندسية من النظر في التحليل ، عدا المستقيم طبعاً ، كما أنه وضع أهم مبادئ مقابلة الأعداد للإحداثيات ، أعني تقابل مستقيم ما لأي عدد مهما تكن طريقة الحصول على ذلك العدد : فالعدد a يقابله مستقيم وكذلك العدد $a + b$ أو العدد $a \times b$ أو العدد $\sqrt{2}$ الخ ... وهذا هو بداية الرياضيات الحديثة .

يمكننا الآن أن نشير في مثال محدد إلى موقف الهندسة التحليلية التي هي ثمرة التخلص من الحدس الهندسي (الأشكال المكانية) بحيث يصبح النظر قاصراً على رموز الجبر دون حاجة إلى الرجوع إلى الهندسة وبراهينها في حل مسائل التحليل. فالمعادلة $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ يقتضي حلها في الهندسة التقليدية أن يرسم الشكل الرباعي $ABCD$ الذي يضم الأشكال الرباعية: $1 + 2 + 2 + 3$.

	ب	ص	س	أ
		٢	١	
		٣	٢	
د				ج

أما في الهندسة التحليلية فلا ننظر في أشكال مربعة ولا نتجاوز النظر في مجرد مستقيمت نرمر إليها على الترتيب س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ . وهذه المستقيمت تمثلها عندنا أعداد فحسب وتذكرنا « بالإمتداد » الديكارتي الذي جعل منه ديكارت جوهر العالم المادي أو الخارجي في فلسفته .

إنه منذ الهندسة التحليلية أخذت الرياضيات تخطو إلى الأمام بخطى سريعة. قال تزيثن (Zouthen) الرياضي ومؤرخ الرياضة : « إنه منذ ديكارت انتقلت الرياضة من مرحلة الحرفة الصغيرة إلى مرحلة الصناعة الكبيرة » وهو يقصد بذلك أن اكتشاف ديكارت فتح أمام الرياضيين كل وسائل التقدم السريع المطرد لأن الرياضة لم تعد حبيسة الأشكال الهندسية بعد أن تحولت إلى تحليل وانطلقت مع انطلاق الأعداد المختلفة الكثيرة التي لا تمثلها أشكال هندسية ما تعوق التفكير الرياضي وتحد من قدرته .

لقد خطا التحليل بعد ديكارت خطوات واسعة فنشأ حساب التكامل والتفاضل وتقدمت نظرية الدوال (Theory of Functions) طوال القرنين السابع عشر والثامن عشر . وكلها اكتشافات عظيمة الأهمية نسكت عنها هنا لأنها لا تهمنا من وجهة نظر نشأة النقد الباطني في التحليل ومسألة المناهج والأسس أو الأصول التي نقصد إليها هنا . ذلك لأن الإنتباه إلى مثل هذه الموضوعات الأخيرة عند الرياضيين أنفسهم لم يظهر إلا في أواسط القرن التاسع عشر عندما أخذ الرياضيون يهتمون بالجانب المنهجي والمنطقي للحساب والتحليل . فهم إلى ذلك الوقت كانوا يثقون كل الثقة ويركنون في اطمئنان لا مزيد عليه إلى النتائج الباهرة التي توصلوا إليها بواسطة التحليل في الهندسة التحليلية وحساب التكامل والتفاضل ونظرية الدوال التي نمت كلها على مر الأيام وطبقوها هم أنفسهم بنجاح موفور في مختلف ميادين العلم الطبيعي

الجدید دون أن یكثرثوا فی الوقت عینه أدنی اکثراث لنقدھا وفحص
أسسھا الی تستند الیھا وبالجملة لمناهجھا . وفی الواقع كان تقدم الریاضیات
منذ القرن السابع عشر رهنأ بتقدم الطبیعیات وخاضعاً لحاجاتها إذ كانت الطبیعیات
ھی الی تمّلی علی الریاضیین الحاجة الی المزید من الکشف الریاضیة . فقتنع
الریاضیون بإسھامهم فی حل مشاكل الطبیعیات وإشباع حاجاتها أولاً بأول
دون أن یشعروا بحاجتهم هم أنفسهم الی نقد مناهجهم الریاضیة وفحص
أسس علمهم ومواجهة حاجات الریاضیات فی ذاتها مستقلة عن الطبیعیات .
فكانت الریاضیات الی ذلك العهد تتألف من قطع متناثرة لا وحدة بینھا
ولا یتبع فی نظریاتها المتباعدة نهجاً موحداً حتی قال ریاضی إنجلیزی
حدث هو قلیب جوردین (Philip Jourdain) فی بحث مسلسل وممتاز
عن أسس الریاضة Foundation of Mathematics فی مجلة العلوم الریاضیة
١٩٣٠ : « إنه الی منتصف القرن التاسع عشر لم یکن علم أضعف
منطقاً من علم الریاضة » . فلا عجب إذن إذا رأینا الفلاسفة الذین اهتموا
بالریاضة قبل ذلك الوقت قد ذهبوا مذاهب شیء فی طبیعتها وأصولھا
وطرقھا فجاءت نظریاتهم غیر مقبولة وغامضة . وأحياناً ضد تقدم
الریاضیات أيضاً ، وساعدت بذلك كله علی إشاعة الغموض عند اکثرین
من الفلاسفة والریاضیین المحدثین الناظرین فی أسس الریاضة .

-(١٦)-

فی الوقت الذی نشأت فیه هندسات غیر أقلیدیة فی أواسط القرن الماضي
نشطت أيضاً معاول الهدم فی التحلیل وكانت نظریة الدوال Theory of
Functions هی مرکز ذلك النشاط ولذلك ستعخذھا نقطة البداية لحركة

النقد الداخلي في التحليل كما اتخذنا من قبل المسلمة الخامسة عند أفليدس بداية لحركة النقد الداخلي في الهندسة .

لقد كانت فكرة « الاتصال الهندسي » *Continuité Géométrique* هي الجذر البعيد والمشارك بين الهندسة والتحليل . وفكرة « الاتصال الهندسي » هذه اصطلاح حديث عند الرياضيين ولكنه يدل على شي قديم في الفكر الرياضي إذ يدل على الكم الذي سمي منذ أرسطو متصلاً في مقابل الكم المنفصل (العدد) ، ولكن يجب الآن أن نفهم فقط من هذا الاصطلاح ذلك المستقيم الذي استبقاه ديكارت في هندسته التحليلية بعد أن استبعد الأشكال الهندسية الأخرى ، وعلى وجه أدق يجب الآن أن نفهم من ذلك الاصطلاح عدم وجود أدنى فجوة أو انفصال (*Discontinuité*) في تتابع قيم دالة من الدوال كما تتتابع نقط مستقيم ما دون فجوة بينها مما يستبقي دائماً حدساً بخط متتابع النقط سواء أكان الخط مستقيماً أم منحياً ، أعني بالطبع يستبقي حدساً هندسياً ما .

ولقد رأينا كيف أن التصور الأكسيوماتيكي الحديث في الهندسة قد تخلص من الحدس الهندسي أو المكاني (نقطة - خط - سطح) بأن أحاله إلى فكرة « الطوائف المنطقية » *Classes logiques* وما يتبع هذه الفكرة من إقامة علاقات منطقية في صورة مسلمات (الفقرة ١٢) ، أما التحليل فقد كان يعتمد كل الإعتماد أيضاً على ذلك الحدس الهندسي للاتصال الذي استبقاه ديكارت في هندسة التحليلية أو الجبرية كما وضعناه . فنظرية الدوال كلها إلى منتصف القرن الماضي إنما كانت تعبر عن هذا الإتصال الهندسي وتستمد منه وجودها . ولفظ « دالة » *Function* من وضع الفيلسوف الرياضي ليبنتز وقصد به المنحنى *Curve* الهندسي الذي يعبر عن علاقات « متصلة » متتابعة بين

كميتين متغيرين (Variables) س و ص يسميان بالإحداثيين Coorodinales كما يقال في اصطلاح الرياضه . فلو أخذنا مثلاً عوضاً عن س و ص شيئين محددين مثل حرارة الغاز والضغط فان العلاقة التي تنشأ من تغير أحدهما عند تغير الآخر ترسم خطاً « منحنياً » هو « دالة » في عرف الرياضه وهذه الدالة « متصلة » اتصال الخط المنحني الهندسي بحيث أن الدالة تكون لها قيمة معينة في كل نقطة من نقط المنحنى ، وبعبارة أخرى هي تجتاز قيماً عديدة متتابعة لا فجوات فيها أي تعبر خطاً هندسياً . طبعاً عدد التجارب عن الحرارة أو الضغط محصورٌ ولكن الخط الداخلي الذي يربط بين التجارب المحصورة العدد يمثل أعداداً متتابعة واتصالاً هندسياً لا فجوات فيه . وهذا هو معنى « الاتصال » الذي تقتصر الكتب الباحثة في أسس الرياضه على ذكره بهذا الاسم فقط (Continuum) أو بوصفه بأنه « الاتصال الهندسي » Geometrical Continuity (أوحى حدس الاتصال أو الحدس المكاني أو الهندسي . ولم يحدث أن رياضياً قبل أواسط القرن الماضي ارتساب في قيمة هذا الحدس الهندسي الذي تقوم عليه فكرة الدالة حتى بين آنثد الرياضي الفرنسي كوشي Cauchy أن هناك دوال غير متصلة بل منفصلة على عكس شهادة الحدس الهندسي مما كانت تنبؤ عنه آنثد العقلية الرياضية وأسماها « الدالة المنفصلة » (Fonction Discotinue) فنشأ عن اكتشافه هذا أن تعرض الحدس الهندسي للاتصال ، أعني تعرض الاعتقاد ببدايته ، إلى الزعزعة والى عدم الثقة فيه أو الركون اليه في علم التحليل . لأن الاتصال الذي كان خاصية الدالة ولبابها أصبح الآن شيئاً غير ملازم لها بل هو عرض قد يعرض لها أحياناً فقط أذ بمناسبة أية دالة يحدث دائماً التساؤل : أهي متصلة أم منفصلة ؟ وهكذا افتتح كوشي بداية الطريق الى تحرير التحليل من الحدود الضيقة التي أسره فيها الحدس الهندسي للاتصال زمنياً طويلاً . فلم يلبث أن فرق بعد.

الفصل الخامس

تحسب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

(١٥) الجبر والهندسة التحليلية . (١٦) النقد الباطني في التحليل
ينتهي إلى نية فكرة «الاتصال الهندسي» ويستعير عنها بالأعداد.
(١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسب الرياضة . (١٨) برنامج
المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية إلى الأعداد الصحيحة .
(١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة . (٢٠) نظرية
الأعداد اللامتتية دعم للمذهب الحسابي . (٢١) أكسيوماتيك العدد.

-(١٥)-

إن ألفاظ هذا العنوان ستوضح فيما بعد . ونبدأ الآن من القول بأن
الخطوات التي تتبعناها من النقد الداخلي إلى الأكسيوماتيك الحديث في الهندسة
يمكن أن نتبع مثيلتها في علم « التحليل » (Analyse) .

لقد كان ديوفانت Diophante الرياضي الإسكندري صاحب
الكتاب المعروف باسم « ارتمطيقا » (Arithmetique) أي الحساب ،
أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما إلى كميات أخرى معلومة .
ولكنه وقف في معالجته لمثل هذه الفكرة (التي أثمرت الجبر) عند الطرق

الطوائف المنطقة Classes والعلاقات التي تقوم بينها مما سبقت الإشارة إليه (فقرة ١٢) . وهذا هو بالضبط الطريق الذي ينتظر التحليل أيضاً منذ ثورته على حدس الاتصال . ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى . فلنعد إلى كلمة ديرشليه : إن مغزاها هو أن علماء التحليل في مرحلة تنقية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التي يقوم عليها علمهم ناقلين وفاحصين . على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم ينتبهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائماً الاتجاه الأخر والطبيعي أعني ناحية تنمية علمهم بالاكتشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة لينهض بشعباته حيال تقدم العلوم الطبيعية . وذلك الاتجاه الجديد النقدي الفاحض للأسس والمبادئ أمد الرياضة القائمة فعلاً بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الاتجاه الآخر الذي يمدّها بالمزيد من أنواع الحساب . وهذا هو مغزى عبارة ديرشليه التي ستتوسع فيما يلي في تفصيلها وفهمها .

-(١٧)-

إن الاتجاه الجديد الذي عبر عنه ديرشليه أحسن تعبير أصبح مفروضاً أو محتوماً على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة إلى ميدان العدد التخيلي Imaginary number أي المركب Comeplex .

لقد قيل إن كوشي : Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعني من الأعداد التخيلية أو المركبة . والواقع أن إحدى مفاخره في الرياضة أنه وسع من أفق نظرية الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثيها عدد تخيلي وأسمّاها الدالة التحليلية Fonction Analytique لقد كان العدد التخيلي معروفاً من قبله : فقد أسماه ديكارت بهذا الاسم

كما اسماه لينتز بالكس المستحيل *Quantité Impossible* . ويسمى ايضاً العدد المركب لأنه يشتمل على عددين حقيقيين (Réels) . وأبسط الأعداد التخيلية هو جذر المعادلة :

$$x^2 = -1$$

وإلى منتصف القرن التاسع عشر كان الرياضيون ينظرون نظرة استغراب الى مثل هذا العدد الذي يشير إلى وجود كم متناقض مثل $\sqrt{-1}$. ولكن منذ أن أدخل كوشي علامة (i) كرمز للعدد التخيلي $\sqrt{-1}$ (والرمز هو الحرف الأول من اسم العدد باللغة الفرنسية ، ويستبدل في اللغة العربية بالحرف الأول من اسم اللفظ المقابل له أعني بالحرف ت) إنساق كوشي بضرورة المحافظة على القواعد الجبرية الى إدخال الأعداد المركبة التي من نوع :

$$a + bi$$

حيث a و b عددان حقيقيان أيأ كانا . ثم عمد إلى استعمال مثل هذا الكم المستهجن عند الحدس كواحد من المتغيرين *Variables* أو الإحداثيين في الدالة فتكونت بذلك « الدالة التحليلية » التي سخر منها الرياضيون بادی ذي بدء وتوقعوا عدم فائدتها، ولكنها ما لبثت أن أثبتت قيمتها في العلوم الطبيعية كما أمدت علم التحليل بنظرية أوضح مما لو كان قد ظل قاصراً على الأعداد الحقيقية والأعداد الصماء (Irrational) فحسب ، حتى أن رياضياً فرنسياً معاصراً درّس زمناً في جامعة القاهرة هو هادامار *Hadamard* يقول في مقال له في دائرة المعارف الفرنسية الجديدة التي ظهرت بعض أجزائها قبيل الحرب الثانية : « إن أقرب بعد بين واقعيتين في العالم الحقيقي غالباً ما يمر بعالم العدد المركب » . ونحن دون أن نتوقف

أكثر من هذا عند ~~الحديث~~ عن الدوال التحليلية التي لها الآن مكانة أولى في التحليل المعاصر يمكننا أن نلمح لماذا انساق الرياضيون بالطبيعة إلى النظر في الأسس العددية أو الحسابية للتحليل بدلاً من الأسس الهندسية التي يمثلها حدس الاتصال . وكما يقول برنشفج Brunschvicg في كتابه القيم « مراحل الفلسفة الرياضية » : إن القرن التاسع عشر ، ، قرن الأعداد التخيلية ، إنما جدد التحليل باستعماله لتلك الأعداد ، وذلك التجديد ليس فقط هو إضافة عنصر جديد (عنصر العدد التخيلي) وإنما هو تجديد لحق الأسس والأصول أي لحق نقطة البداية في التحليل . والتجديد الذي لحق الأسس والأصول والذي يشير إليه برنشفج إنما هو امتداد وتعميم لفكرة العدد وإحلال للعدد محل فكرة الاتصال الهندسي كأساس يقوم عليه التحليل كله من الآن فصاعداً . وهكذا على نحد تعبير مشهور للرياضي فيليكس كلاين Felix Klein وصف به حركة مماثلة في ألمانيا قام بها الرياضيان فيرستراس Weierstrass وكرونكر Kronecker وصارت العبارة عنواناً معبراً عن تلك الحركة التي أحلت العدد محل الاتصال الهندسي في كل الكتب التي تتحدث عن تلك المرحلة في تاريخ الرياضيات : « أصبح التحليل « متحسباً » (L'Analyse s'est arithmétique) ، وتلك كلمة وضعناها عنواناً لهذا الفصل ولكنها لا تستقيم تماماً في اللغة العربية مع أنها ضرورية لكي نبقى على وحدة الاصطلاح في اللغات المختلفة ثم لكي نفهم كيف أن التحليل الذي كان معتمداً على الحدس الهندسي للاتصال تخلى عنه واستعاض عنه بالحساب العددي المعروف ، يستمد منه جنسوه البعيدة ويرد إلى أعدادة الصحيحة (Entiers — Integers) ودون إخلال بقواعده ، ذلك العدد التخيلي المستهجن . وواضح أن ذلك الارتداد إلى الحساب كفيل بطرد كل حدس هندسي من علم التحليل ويأكسبه أيضاً وضوحاً ونقاءً ويقيناً .

يقول الفيلسوف برنشفيج في كتابه « مراحل الفلسفة الرياضية » : « إن علم الرياضة باتخاذ فكرة العدد الصحيح الإنجابي أساساً له يستطيع أن يدعى بحق أنه طرد من العلم الرياضي كل غموض وشك ». تلك هي وثيقة ميلاد المذهب الحسابي (Doctrine Arithmétique) المشهور في تاريخ الرياضة أثناء الربع الثالث من القرن الماضي والذي كانت رسالته رد التحليل الى الأعداد ، وتأسيسه على علم الحساب المعروف ، ليكتسب التحليل يقيناً مستمداً من يقين الإعداد ومبتعداً بذلك كله عن حدس الاتصال الهندسي الذي استبقاه ديكارت ثم تحطم شيئاً فشيئاً كأساس سليم وثيق للتحليل كما رأينا .

- (١٨) -

لقد تكلمت الى الآن عن نشأة التحليل وارتباطه بالهندسة حتى منتصف القرن التاسع عشر ، ثم عن حركة النقد الباطني التي بدأت في نظرية الدوال وحطمت العنصر الهندسي الكامن في أعماق التحليل متمثلاً في حدس الاتصال ، وارتدت بالرياضيين من النظر في أهداف الرياضة وتنميتها الى النظر فقط في أصولها وأسسها لتنقيتها من روابطها الهندسية ، ثم تكلمت عما تمخضت عنه هذه الحركة النقدية الباطنة من « تحسب » التحليل أي أقامته على نظرية الأعداد وهذا هو الموضوع الذي نرى الآن أن نتوسع في فهمه بعض الشيء لأنه يتصل مباشرة بمسألة أسس الرياضة ومنهجها .

هذا الاتجاه نحو تأسيس الرياضيات على الأعداد الصحيحة المعروفة إنما ظهر ونما في فرنسا والمانيا معاً وتبعهما فيه رياضيو البلاد الأخرى . ولقد عبر عنه الرياضي الفرنسي جول تانري Jules Tannery في كتابه « نظرية الدوال ذات المتغير الواحد » عام ١٨٨٦ بقوله : « يمكن

تكوين التحليل كله على أساس فكرة العدد الصحيح الإيجابي وفكرة جمع الأعداد الصحيحة ، وليس هناك ما يدعو الى الالتجاء الى أية مسلمة أخرى أو الى أي مدد من التجربة [= الحدس الهندسي] . وفكرة اللامتناهي Iinfini التي يجب أن لا تظل من الآن فصاعداً سرّاً معمياً في الرياضه ترد الى ما يأتي : بعد كل عدد صحيح يوجد عدد صحيح آخر « ...

هكذا يرى هذا الرياضي أن التحليل أو قل الرياضه كلها إنما ترد الى مسلمات الحساب وحده وهي العدد وعملية الجمع دون حاجه الى مسلمات أخرى كأسس للتحليل ، كما يثير بنوع خاص مشكلة نوع مميت من الأعداد برز بحدة في ذلك الوقت هو الأعداد اللامتناهيه Iinfini فذهب للدهشة الشديدة الى أنها لم تعد لغزاً لأنها ترد الى نظرية حساب الأعداد الصحيحة نفسها. وهكذا نرى أنه عندما يعتنق رياضي ما ذلك الاتجاه في تحسب التحليل تنشأ عنده بالضرورة المسألة الشائكة وهي كيف يمكن للأعداد الأخرى غير الصحيحة المستعملة في التحليل كالأعداد السالبة والأعداد الصماء والأعداد التخيلية والأعداد اللامتناهيه وغيرها أن ترد الى الأعداد الصحيحة الإيجابية ؟

لقد استنفدت هذه المسألة مجهودات ضخمة ، وأثارت نظريات إضافية جديدة معقدة وتعريفات دقيقة للتصورات التحليلية الأساسية كالاتصال Continuum والدالة Fonction والحد Limit واللامتناهي Iufini وغيرها . وافتتح البحث في هذه المشاكل كلها في آن واحد فيرستراس في جامعة برلين وميراي Méray في جامعة ديجون بفرنسا ، وهما بطلا المذهب الحسابي وعنهما أخذ رياضيو عصرهما .

لقد كان هذان المؤلفان يجهلان المنهج الأكسيوماتيكي الذي بعثه إذ ذاك

معاصرهما مورتر باش (وقد تكلمنا عنه سابقاً بمناسبة الهندسة) فلجأ المؤلفان المذكوران الى ما سمي في ذلك الوقت بالمنهج التكويني Méthode Génétique وتبعهما في ذلك أعلام عصرهما في الرياضه أمثال ديدكند Dedekind وكرونكر Kronecker في المانيا ومولك Molk وجول تانري Tannery في فرنسا .

والمبدأ الذي يقوم عليه المنهج التكويني أو التوليدي هو كما يعرفه جول تانري على النحو الآتي « إن فكرة العدد تتكون بواسطة تعميمات متتابعة . والقضايا الخاصة بالعمليات الأربع الأساسية مطبقة على الأعداد الصحيحة تكوّن موضوع أول فصول الرياضه أي الحساب . ثم ندخل بعد ذلك الدوال التي يمكن أن ينظر اليها كزوج Couple من الأعداد الصحيحة . فنطبق على هذه الأعداد الجديدة تعريفات تلك المعادلات والخواص الأساسية التي يتعرض اليها الحساب . وفي بداية الجبر ندخل فكرة جديدة هي فكرة الأعداد النسبية Nombres Ralatifs أي الأعداد التي تسبقها دائماً علامة + وعلامة - . وهنا أيضاً نطبق على هذه الأعداد الجديدة تلك التعريفات والخواص الأساسية السالفة ... » وهكذا يستمر تانري في إدخال الأعداد المختلفة شيئاً فشيئاً كالأعداد الكسرية والصماء والدائرة والتخيلية واللامتناهية وغيرها مع الاحتفاظ ببقاء العمليات وتعريفاتها . ثم يختم كلامه كما يأتي : « إن الأمر الهام هو أن تتكوّن الرياضيات شيئاً فشيئاً بحيث نتجنب في كل مراحل تكوينها على أساس العدد وحده أي التجاء الى الحدس التجريبي (Intuition empirique) وعندما ننهج هذا النهج فإن التعريفات المتتابعة للأعداد والعمليات تكون مجردة وصورية لأنه لا حدس هندسي فيها ... »

طبعاً لا يتسع المقام هنا لاستعراض كل خطوة من خطوات المذهب الحسابي في ضوء ذلك البرنامج الحافل الذي تحدث عنه . جول تانري . ولكن يجب مع ذلك أن نعطي هنا على سبيل التمثيل مجرد إحساس عن كيف أنه استناداً الى إنحطة التكوينة التي ذكرناها عن تانري يمكن رد الأعداد التخيلية بالذات — التي أثارت مسألة تحسب الرياضة — الى الأعداد الصحيحة .

يقول ميراي Méray الذي له الفضل في افتتاح هذه الحركة : « إذا كانت بعض الرسوم الهندسية تمثّلنا لهذه المقادير التخيلية بـرموز مناسبة ... فإنه لا ينتج عن ذلك أنه توجد علاقة ما بين تلك الرسوم والأعداد التخيلية أكثر مما توجد علاقة بين ظاهرة طبيعية ما والمنحنى الذي يمدنا بصورة بصرية ترمز اليها . وليس هناك ما يدعو الى بذل مجهود ضائع في النفاذ الى معنى الرمز $\sqrt{-1}$ الذي لا معنى له في الواقع لأن الكم السلي لا يمكن أن يكون له جذر تربيعي » .

فالكم المرموز له بعلامة $\sqrt{-1}$ ليس ، كما قلنا ، إلا تأليفاً من عددين حقيقيين (أ ، ب) مرتبين بهذا الترتيب نتفق بالاصطلاح على أن نجري عليهما القواعد المعروفة في الحساب العادي والتي تُثبت لهما خواص الاشتراك (Association) والتبادل (Commutation) والتوزيع Distribution وغير ذلك . وهنا نترك ميراي واستعراضه الرياضي البحث ونلجأ الى الفيلسوف المنطقي لويس كوتوراه Couturat الذي أعطى تخطيطاً مبسطاً لهذه النظرية في كتابه المسمى « اللامتناهي الرياضي » L'infini Mathématique على الوجه الآتي :

١ — نسمي عدداً تخيلياً المجموعة المكونة من عددين حقيقيين مرتبين

ترتيباً معيناً . فليكن العددان الحقيقيان أ و ب فنكتب مؤقتاً العدد التخيلي على الصورة الآتية :

$$(أ ، ب)$$

٢- تعريف المساواة : العددان التخيليان يتساويان عندما تكون الحدود المتناظرة متساوية . وعلى هذا فإن المعادلة $(أ ، ب) = (أ' ، ب')$ إنما تعني المعادلتين :

$$أ = أ' \quad و \quad ب = ب'$$

٣- تعريف الجمع

$$(أ ، ب) + (أ' ، ب') = (أ + أ' ، ب + ب')$$

٤- تعريف الطرح

$$(أ ، ب) - (أ' ، ب') = (أ - أ' ، ب - ب')$$

ونرى من هذا في نفس الوقت أنه لكي يتساوى عددان تخيليان يجب أن يكون الفرق بينهما صفراً . فإذا كان

$$أ - أ' = 0 \quad و \quad ب - ب' = 0$$

$$(أ - أ' ، ب - ب') = (0 ، 0)$$

٥- نظرية

$$(أ ، ب) \times ن = (أن ، ب ن)$$

حيث ن عدد صحيح ما .

٦- تعريف الضرب : حاصل ضرب عددين تخيليين هو العدد الذي نحصل عليه بتأليف حدودهما وفقاً للصيغة الآتية التي هي قاعدة نسلم بها هنا تسليماً

$$(أ، ب) \times (أ، ب) = (أأ - بب، أب + با)$$

لنقف قليلاً عند هذه القاعدة السادسة الخاصة بالضرب وعند القاعدتين

النالتين (٧ و ٨) لأنها تمدنا بما يميز المقادير التخيلية :

إن حاصل ضرب عددين تخيلين لا يمكن أن يكون صفراً إلا إذا كان

أحد العوامل أو كلها صفراً :

فلكي يكون لدينا

$$أأ - بب = ٠ \quad \text{و} \quad أب + با = ٠$$

يجب أن يكون

$$أ = ب = ٠ \quad \text{و} \quad أ = ب = ١$$

حينئذ تكون الصيغة العامة للضرب

$$(٠ + ٠، ٠ - ٠)$$

٧ - حالة خاصة لما تقدم هي إذا كان $ب = ٠$ فإن الصيغة العامة

للضرب تكون

$$(أ، ب) \times (أ، ٠) = (أأ، ٠)$$

وهذه النتيجة هي بعينها كما لو كان المضروب فيه عدداً حقيقياً كما

في القاعدة الخامسة :

$$(أ، ب) \times أ = (أأ، أب)$$

وأذن فمن الطبيعي أن نعتبر العدد التخيلي الذي يكون حده الثاني صفراً

هو بعينه العدد الحقيقي الذي يتكون منه حده الأول إذ هو يلعب نفس الدور

في حالة الضرب .

أما إذا استعملنا في الصيغة (رقم ٧) السالفة $أ = ١$ مع استبقاء الصفر

كقيمة ب^١ فسنحصل على

$$(أ، ب) \times (٠، ١) = (أ، ب)$$

وهذا يدل على أن العدد التخيلي (٠، ١) هو نموذج الضرب للأعداد التخيلية ويختفي كعامل من عوامل الضرب في حالة الضرب. ويمكن من هذه الجهة تشبيهه بالعدد الحقيقي + ١ في حالة الضرب المألوف.

٨- وعلى عكس ذلك يكون العدد التخيلي (١، ٠) عاملاً لا يختفي في حالة الضرب ولا يمكن تجاهله لأن

$$(أ، ب) \times (١، ٠) = (أ، ب)$$

وبصفة خاصة

$$(١، ٠) \times (١، ٠) = (٠، ١) = -١$$

وعلى هذا فإن العدد التخيلي (١، ٠) مضروباً في نفسه أي ما يسمى تربيع العدد التخيلي هو عدد يساوي العدد الحقيقي -١

وهذه هي النقطة الهامة التي نريد أن نصل إليها لنبين أن $\sqrt{-١}$ هو العدد المركب (١، ٠)

لنلاحظ أيضاً ملاحظة هامة وهي أن العدد التخيلي (أ، ب) يمكن أن يعتبر حاصل جمع لعدد صورته (أ، ٠) و (٠، ب) بمعنى أن يجمع بين عدد حقيقي وعدد تخيلي صرف. من جهة أخرى كل عدد تخيلي صرف يساوي لحاصل ضرب عدد حقيقي بعدد تخيلي هو (١، ٠)

$$(٠، ب) \times (١، ٠) = (٠، ب)$$

يمكن إذن أن ترد كل الأعداد التخيلية إلى الوحدة التخيلية (١، ٠) التي ترمز إليها تبسيطاً للكتابة بالحرف ت فنكتب الأعداد التخيلية كما يأتي :

$$أ + ب ت \quad (\text{وبالفرنسية } a + b i)$$

وهو عدد ثنائي نطبق عليه كل القواعد الجبرية إذا اتفقنا على مراعاة الصيغة المشار إليها بالنجمة (*) في الفقرة الثامنة فنحصل منها على

$$ت \times ت = ت^2 = ١ -$$

فبفضل هذه الصيغة الأخيرة نجد أن الرمز ت يمثل الجذر التربيعي للعدد ١ - وهو العدد الذي حل محل العدد التخيلي (١ - ، ٠) . وتأخذ (أ ، ب) عملياً الصورة $\sqrt{١ - ب} + أ$ أو $أ + ب ت$ ولكن ما يهمنا دائماً هو أن ندرك أن العدد التخيلي أصبح على هذا النحو عدداً حقيقياً تنطبق عليه كل قواعد الجبر العادي .

ويتضح من هذا المثال أنه لكي يعمم العدد الصحيح ويمتد الى إذابة العدد التخيلي فيه يوضع الرمز (أ ، ب) الذي يتألف من عددين حقيقيين . ثم نعرف بعد ذلك المساواة والجمع والطرح والضرب . وبعد هذا يمكن بيان أن نظريات الحساب العادي تظل مستقيمة في حساب الأعداد التخيلية . وعلى هذا النحو نفسه تمتد فكرة العدد الصحيح الى الأعداد الأخرى الكسرية والنسبية والصماء والدائرة الخ ...

- (١٩) -

من الأعداد التي يجب أن نتوقف عندها الأعداد الصماء ومشكلة ردها الى الأعداد الصحيحة . لقد اصطلح العرب على أن يضعوا في مقابل العدد الذي سموه « المطوق » وهو الذي ينتهي في جذره التربيعي ويقبل القسمة بأعداد منتهية . العدد « الأصم » الذي لا ينتهي جذره التربيعي ولا قسمته ومن ذلك أيضاً العدد الدائر .

ليس من الصعب إذن في حالة الأعداد الصماء أن ندرك لماذا اصطدم

تعميم العدد الصحيح بصعوبات جمة ناجمة عن طبيعة العدد الأصم ذاتها إذ هو عدد كما وضح لنا الآن لا يمكن تحديده أو تعريفه بعدد ينتهي من الأعداد المنطوقة بل يحتاج دائماً الى سلسلة لا تنتهي من هذه الأعداد. ولقد لفتت هذه الصعوبات أنظار الرياضيين حتى في العصر القديم فحاولوا رد الأعداد الصماء الى الأعداد الصحيحة لكي يعطي الرياضيات ما هي جديرة به من المعقولية والوضوح. فهم إذن حاولوا « تحسيب » الرياضة (Arithmetisation of Math.) أيضاً قبل ظهور هذه الحركة - التي وصفناها - في منتصف القرن الماضي.

لقد كان الفيثاغوريون أول من لاحظوا أن النسب بين بعض الأبعاد وخاصة بين الوتر وأضلع المربع نسب صماء (انظر فقرة ٦) أي لا تقاس بالأعداد الصحيحة. فذكر لنا افلاطون أن تيودور القورينائي أثبت أن $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ الخ أعداد صماء، كما أن صديقه طيطاوس نظر في العدد الأصم بصفة عامة. وبدلاً من أن يمتد القدمات، أو يحاولوا أن يمتدوا، بالعدد المنطوق الى مجال العدد الأصم على وجه علمي أو بناء على نظرة علمية خلصوا ببساطة الى عجز علم العدد أو الحساب وفضلوا عليه علم الأبعاد أي الهندسة لكي يقيموا هذه الأخيرة على مسلمات وتعريفات. ومع ذلك فإن اكتشافهم للأعداد الصماء جعلهم يفكرون منذ بداية الرياضة عند اليونان في تحسيب الرياضة على النحو التالي :

لقد ميزوا علم الحساب الذي موضوعه الأعداد الطبيعية عن اللوجستيقا (Logistique) الذي جعلوا موضوعه جداول عملية تحوي نتائج عمليات حسابية يستخدمها المساح والمهندس والفلكي وغيرهم. وفي هذه الجداول حاولوا أن يتجنبوا الأعداد الصماء وذلك بإثبات علاقات أو نسب بين

أعداد طبيعية فحسب . فهي جداول تعطى مثلاً أقرب سلسلتين من الأعداد الطبيعية لعدد أصم معين أحدهما أقرب سلسلة إليه بالنقص وأخرهما أقرب سلسلة إليه بالزيادة ، فيقع العدد الأصم بينهما . وتلك هي البذرة الأولى لفكرة تعميم العدد كما يلاحظ الرياضي برنجشيم Pringsheim .

وفي العصر الحديث أدى كل من جبر فيت وهندسة ديكارت الى تعميم العدد أيضاً كما سبق أن رأينا من جهة أنهما مثلاً كل بعد هندسي بعدد ما ، وتعود الرياضيون على أثرهما أن يوحدا بين العدد والبعد . وقد رسخت بالاستعمال هذه العادة في العلم الحديث بعد اكتشاف حساب التكامل والتفاضل بحيث أصبح المهندسيون أنفسهم يتأملون الأعداد مباشرة ويستنبطون من النظر فيها وحدها خصائص الأشكال الهندسية (وهي ليست أعداداً) . فمثلاً الهندسي لوجاندر Legendre يرهن عام ١٨٢٣ القضايا الخاصة بالمماثلة أو المشابهة (Similitude) في الهندسة وذلك بالنظر في الأعداد التي تمثل أبعاداً وتطبيق نظريات الحساب والجبر على تلك الأعداد . وكان هذا السلوك من جانب الرياضيين يتضمن في نفسه مشكلة ظلت زمناً طويلاً غير ملحوظة عندهم وهي أنهم باعتمادهم على الأعداد دائماً إنما كانوا يعتقدون على « الاتصال الهندسي » ويتجاهلونه تماماً بل ويعملون على تقيض ما كان يشهد به الحدس الهندسي عندهم . والى منتصف القرن التاسع عشر توهموا أنهم إنما تغلبوا على تلك المشكلة بافتراضهم أنه ليس فقط لكل بعد عدد يقابله بل بافتراضهم أيضاً الفرض العكسي وهو أن لكل رمز عددي يحصلون عليه بتأليف اللوغاريتمات الممثلة لأعداد مختلفة الأنواع (النسبية أو التخيلية أو الصماء الخ ...) يوجد بعد يقابله بالضرورة أيضاً . والرياضيون الذين تشككوا في الوضوح الهندسي

لذلك الفرض لما رأوا استحالة الانتقال من الأعداد الى الأبعاد انتقالاً منطقياً صرفاً أو بصفة يقينية وثيقة بلأوا الى وضع مسلمة صريحة في صلب الرياضة دون برهان عليها باعتبارها مسلمة (لا نظرية) تسمى مسلمة كانتور وديدكند (Pastulat de Cantor - Dedekind) تبرر هذا الانتقال وتضع ضرورته وضماً ، كما أنهم اجتهدوا من جهة أخرى في تفصي أنواع الأعداد وفي تكوين سلسلة منها محكمة الحلقات في تسلسلها إبتداء من الأعداد الصحيحة لكي يزدوا علمهم التحليلي يقيناً ونقاء من الأبعاد الهندسية ، وهذا ما أدى الى التعمق في فكرة الأعداد الصماء التي نحن بصدددها هنا لكي يربطوا اليها الأبعاد الهندسية بواسطة المسلمة السابقة الذكر . ذلك لأن العدد الأصم الذي لا يتناهى كالدائر مثلاً بدا لهم أنه هو الذي يمثل الأبعاد الهندسية التي يشهد بها الحدس لأن في العدد الأصم عملية لا تنتهي أي مستمرة أو متصلة وكأنها بذلك تمثل ذلك الانصاف (Continuum) المعبر عن الهندسة .

ولقد كانت نتيجة ذلك التعمق في الكشف عن طبيعة الأعداد الصماء أنهم رأوا فيها إحدى نظريتين : الأولى نظرية الحد (Limit) الذي تقف عنده السلسلة اللامتناهية لأعداد صماء (نظرية ميراي - فيرستراس - كانتور - Cantor) ، والثانية نظرية القطع (Coupure أو Cut) بين مجموعتين لامتناهيتين (Deux ensembles infinis) من الأعداد الصماء (نظرية ديدكند - كرونكر - تانري) فأصبحت فكرتا الحد والقطع منذ ذلك الوقت الجسرين اللذين يعبر أحدهما أو الآخر كل رياضي للانتقال من الأعداد المنطوقة أو الطبيعية الى الأعداد الصماء المثلة للأبعاد الهندسية بالمسلمة المذكورة وبذلك رُبطت الهندسة بالأعداد نهائياً عن طريق الأعداد الصماء التي ترد بإحدى الفكرتين - الحد أو القطع - الى الأعداد المنطوقة .

ما هي نظرية الحد أولاً ؟

لقد أدخل الرياضي كوشي Cauchy قبل ذلك بسنوات فكرة « الحد »
ليدل على ما يأتي : عندما تقترب القيم المتعاقبة لمتغير ما اقتراباً شديداً من
قيمة ثابتة معطاة مقدماً بحيث لا تفرق عن هذه القيمة (الثابتة) إلا بأقل
ما نشاء من القيم فإن هذه الأخيرة (الثابتة) تسمى الحد لكل تلك القيم .
والعدد الأصم عند كوشي هو حد بهذا المعنى : فهو حد للكسور المختلفة
التي تمدنا بقيم تقترب شيئاً فشيئاً من هذا الحد .

لكن ميراي Méray هو الذي جاء بالتعبير الرياضي للعدد الأصم على أساس
فكرة الحد . فهو يطلق لفظ المتغير Varianto على سلسلة لا متناهية من
الأعداد المنطوقة $1^{\text{er}}, 2^{\text{er}}, 3^{\text{er}}, \dots, n^{\text{er}}$. فإذا كانت هذه المتوالية
عند n هي أقل من عدد منطوق ما هو ϵ مهما يكن هذا الأخير صغيراً
فإننا نقول إن ذلك المتغير « متجمع » Convegrente عند الحد ϵ .
وللتعبير عما سبق برمز الرياضه يكتب $\forall \epsilon > 0$ للدلالة على المتغير المتجمع
للمتوالية $1^{\text{er}}, 2^{\text{er}}, 3^{\text{er}}, \dots, n^{\text{er}}$ بحيث أنه ابتداء من n يكون :

$$\forall n > n_0 \quad |x_n - \epsilon| < \epsilon$$

هذا إذا كان للمتغير المتجمع حد .

ولكن إذا لم يكن له حد فيجب أن نضع له « حدّاً مثالياً » (Limite idéale)
نسميه الكم الأصم . فالعدد الأصم عند ميراي هو حد مثالي يتجمع فيه
متغير ما . كما يمكن القول بأن التجمع لأي متغير إنما هو الميل نحو حد ما
سواء أكان الحد حقيقياً أو مثالياً .

أما النظرية الأخرى التي تعتمد على فكرة القطع (Theory of cut)
فيقول ديدكند إنه يمكن أن نقطع أو نفصل على أنحاء لا متناهية مجموعة ما .

من الأعداد المنطوقة الى مجموعتين اثنتين أ و ب بحيث يكون كل عدد من المجموعة أ أقل من كل عدد من المجموعة ب ومثل هذا الفصل نسميه « قطعاً » في مجموعة الأعداد المنطوقة .

ولا يخلو هذا القطع من أحد أمرين : الأمر الأول هو أنه يوجد عدد ما سواء في أ بحيث يكون أكبر أعداد هذه المجموعة أو في ب بحيث يكون أصغر أعداد هذه المجموعة ، فنجعل عندئذ القطع يقابل ذلك العدد الذي نحصل على تعريفه وتعيينه بواسطة المجموعتين أ و ب . وهذا بالطبع عدد منطوق لأننا لا نعرف بعد إلا هذا النوع من العدد . والأمر الثاني هو أنه لا يوجد عدد ما سواء في أ بحيث يكون أكبر أعدادها ، أو في ب بحيث يكون أصغر أعدادها ، فنتفق عندئذ على أن نضع للقطع رمزاً عددياً يقابله وفي هذه الحالة يكون الرمز معبراً عن عدد أصم . وبما أن تلك المقابلة تسمح للرموز التي نحصل عليها على ذلك الوجه بأن نقارنها فيما بينها وكذلك بأن نقارنها بالأعداد المنطوقة وبأن نجري عليها نفس العمليات التي نجريها على الأعداد المنطوقة فمن الطبيعي أن نقول بأن الرموز الجديدة تمثل أعداداً كالشأن في الأعداد المنطوقة نفسها . على كل حال يصبح العدد الأصم في هذه النظرية مجرد اصطلاح على قطع، ورمز له نجري عليه العمليات كلها .

ومهما يكن من أمر تفضيل الرياضيين لنظرية من النظريتين السابقتين على الأخرى فيما يختص بالعدد الأصم فإن الأمر الهام من وجهة نظرنا في هذه الدراسة المنصبة على أسس الرياضة هي أن « تعميم » فكرة العدد الحقيقي وامتدادها الى جميع الأعداد كالتخيلية والصماء أصبح أمراً واقعياً على أيدي رياضيي الربع الثالث من القرن الماضي . فهولاء

الرياضيون الذين تعرضوا لتحسب التحليل بينوا إمكان تركيب أو تأليف الأعداد كلها ابتداء من العدد الصحيح وحده والامتداد به ، أعنى يقينه ، الى كافة الأعداد . وبما أن أحداثيات الدوال تتضمن دوماً خليطاً من تلك الأعداد فيمكن القول بأن التحليل أصبح منذ ذلك الوقت « متحسباً » (Arithmétisé) ولا يحتاج الى حدس الاتصال الهندسي .

فلنختم كلامنا عن هذا المذهب الحسابي بكلمة هادامار Hadamard استاذ الرياضيه بجامعة باريس والذي درّس بجامعة القاهرة أيضاً وهي :

« إن الرياضة اليوم بدلاً من كلمة باسكال القائلة : بأن ما تقبله الهندسة فهو مقبول عندنا في الرياضة كلها ، تحل محلها كلمة أخرى هي أن ما يقبله الحساب فهو مقبول رياضياً عندنا ... وإذا كان كل شيء في الرياضة متولد اليوم أو مستخرج من فكرة العدد الصحيح فلنحي مع بوانكاريه تحية وداع أخير فكرة الاتصال الهندسي التي كانت وحدها فيما مضى قادرة على مثل ذلك التوليد والإخراج » .

- (٢٠) -

لقد أضفى المذهب الحسابي على رياضيات ذلك العصر ، التي كانت مهلهلة ، تسلسلاً جميلاً وتماسكاً بديعاً جامعاً لفروعها ونظرياتها ابتداء من الأعداد الصحيحة وعملياتها التي تولف علم الحساب . فانتشر يقين هذه ووضوحها شيئاً فشيئاً الى جميع أنواع الأعداد والنظريات التي تتناولها الرياضة وذلك على أساس المنهج التكويني أو التوليدي الذي استخرجها جميعاً من الأعداد الصحيحة ، مستبعداً بذلك كل حدس هندسي بحيث أصبحت الهندسة نفسها

بمقتضاه نظراً في أعداد وحسب . وقد أحتاج ذلك كله الى مزيد من نظريات تتفاوت تعقيداً كالتى شرحناها .

ولكن لم يكن المذهب الحسابي الكلمة الاخيرة والوحيدة في هذا الاتجاه الذي يضيف على الأعداد الصحيحة كل هذا اليقين الرياضي . فهذا المذهب الذي استتم تكوينه في غضون الربع الثالث من القرن الماضي إنما لقي من خارجه ومن اهتمامات غريبة عنه توطيداً وتدعيماً وذلك بظهور «نظرية المجاميع» (Théorie des Ensembles أو Theory of Sets) التي جاء بها الرياضي الالماني جورج كانتور Georg Cantor ونشرها من ١٨٨٣ الى ١٨٩٥ .

وتدعيم نظرية المجاميع للمذهب الحسابي من جهتين :

الأولى أن نظرية جورج كانتور أكدت نزعة الربع الثالث من القرن الماضي في تأسيس الرياضيات كلها ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب المعروف . ذلك لأن نظرية المجاميع نظرية تعمقت الحساب نفسه وكشفت عن نظريات جديدة ومعقدة أضفت عليه قدرة عظيمة على حل الكثير من أعوص مشاكل الرياضيات العليا التي لم يكن لها حل الى ذلك الوقت .

أما الجهة الثانية فهي أن نظرية المجاميع وسعت من أفق فكرة العدد ذاته عندما أضافت الى سلسلة الأعداد الصحيحة المعروفة لدينا والتي اسمتها العدد المنتاهي (Finite Number) سلاسل من الأعداد الجديدة تسمى بعد تلك السلسلة المنتهية واسمها الأعداد العابرة أو المتجاوزة للمنتهى (Transfinite Numbers) ونكتفي بأن نسميها الأعداد اللامتناهية الكبر أو «الاعداد اللامتناهية» فحسب . ولقد سلح هذا النوع الجديد من الأعداد علم الحساب بأجنحة ضخمة جعلته يخلق بعيداً في سماء اللامتناهي الذي حير الفلاسفة والرياضيين

منذ القدم ، منذ زينون Zenon الإيلي تلميذ بارمنديس رأس المدرسة السقراطية (سقراط وافلاطون وأرسطو) حتى الربع الأخير من القرن الماضي . وهاتان الجهتان توكيد ولا ريب للمذهب الحسابي جاءه من واد بعيد عنه ومن اهتمامات مخالفة لاهتماماته ، فنظرية المجاميع دعم للمذهب الحسابي ولو من خارجه لأنها أكدت أهمية الأعداد .

ونحن دون أن نتعرض لتاريخ فكرة اللامتناهي عبر القرون نقول في اختصار أن الفارق بين تناولها طوال العصور وبين تناول جورج كانتورها هو الفارق بين الجدل الفلسفي الذي يحلل أفكاراً غامضة والمعالجة الرياضية التي تعالج أعداداً على أساس عمليات حسابية . ولم يكن من الممكن أن تنضج فكرة اللامتناهي لتصاغ في أعداد وعملياتها إلا بعد أن نضج الفكر الرياضي في القرن الماضي لتقبل الأعداد وحدها كأساس للرياضة وبعد أن نضجت فكرة الأعداد نفسها بأنواعها المختلفة عند الرياضيين . لقد أقحم زينون الإيلي في القديم فكرة اللامتناهي ليحتج على استحالة « الحركة » التي نادى بها هرقليطس بدلاً من السكون أو الوجود الثابت الذي نادى به أستاذه بارمينديس ، وخلاصته احتجاجه أن السهم مثلاً الذي ينطلق من قوسه إلى هدف ما لا يمكنه أن يفارق قوسه على حد زعمه لأن عليه أن يقطع أولاً نصف المسافة إلى الهدف وقبل ذلك نصف النصف وقبل ذلك نصف النصف النصف وهكذا يتراجع التقسيم إلى ما لا نهاية ، ولا يمكن للسهم حينئذ أن يقطع ما لا ينتهي من الانقسامات ، فالحركة باطلة والوجود ساكن ثابت كما قرر أستاذه بارمينديس .

ولقد ناقش أرسطو موقف زينون ليبين الزيف فيه فرأى أنه موقف خلط بين ما هو « بالقوة » (أو ما هو بالإمكان قابل للقسم) وما هو قائم « بالفعل » ، فالتقسيم الذي لا ينتهي هو عملية ممكنة فقط . ولكن السهم

لا يجتاز انقسامات ممكنة وإنما يجتاز مسافة قائمة أو موجودة بالفعل بين قوسه وهدفه ولذلك فالحركة قائمة .

ولم تحظ الفكرة التي أقحمها زينون في الفكرين الفلسفي والرياضي ما هي جديرة به تماماً من عناية لصعوبتها فنجد فلاسفة العصر الحديث يتحدثون عن الله تعالى باعتباره كمالاً « لا ينتهي » كما نجد نيوتن يتحدث عن مكان وزمان غير منتهيين كل ذلك دون تناول اللامتناهي الكبير مباشرة . ولكن ربما كان بولزانو Bolzano في القرن ١٩ أول من ركز انتباهه على تمحيص هذه الفكرة تمحيصاً رياضياً عندما وضع أمام كل عدد من سلسلة الأعداد الصحيحة (٣، ٢، ١ ...) وهي لا تتوقف بالطبع عند نهاية ما ، عدداً زوجياً من سلسلة الأعداد الزوجية المتضمنة في السلسلة الأولى (٦، ٤، ٢ ...) وهي بالطبع نصف أعداد السلسلة الأولى ولا تتوقف عند نهاية كذلك مثل السلسلة الأولى . فاستنتج بولزانو من هاتين السلسلتين اللامتناهيتين المتقابلتين عدداً بازاء عدد ، أن خاصية العدد اللامتناهي الكبير هي أن الكل يساوي جزءه على خلاف المؤلف باعتبار أن سلسلة الأعداد الزوجية هي نصف الأعداد في السلسلة الكاملة .

إن خصائص العدد اللامتناهي التي منها تلك الخاصة التي أشار إليها بولزانو إنما أصبحت واضحة في نطاق المعالجة الرياضية التامة للأعداد اللامتناهية عند جورج كانتور في الربع الأخير من القرن الماضي . ونحن لكي نكون فكرة مبدئية عن هذه النظرية الجريئة التي اقترحت أمتع الحصون الرياضية وأعني حصون العدد اللامتناهي الكبير ، والتي تعتبر بحق أبعد الاكتشافات الرياضية وأعجبها والتي أثارت منذ ظهورها وتثير إلى الآن الأبحاث والنقاش وقسمت الرياضيين إلى معسكرين متنازعين ، نقول لكي نكون عنها فكرة

امبدئية نكتفي بالإشارة إليها من خارجها فنقول إنها نظرية قسّمت الأعداد
لى أعداد عادة أو أساسية Cardinal Numbers وإلى أعداد مرتبة Ordinal
Numbers . ولكل قسم نظرياته وخصائصه المميزة والمخالفة . ثم قسّمت
بعد ذلك الأعداد الى متناهية Finite N. وإلى لا متناهية Transfinite N.
فدرست في كل من هذين القسمين أعداد العاده وأعداد المرتبة ، فتنوعت
النظريات في كل منهما كما تكشف فروق شاسعة بين نوعي العدد المتناهي
واللامتناهي حتى في معنى أو قيمة العمليات الحسابية نفسها كالجمع والضرب
والقسمة والحدور والقوى والدالة والحد الخ ...

ولكي نتيين مغزى أو معنى هذا التنوع والاختلاف بين نوعي العدد
فيما يتصل ببعض العمليات الحسابية المعروفة لدى الجميع والتي ذكرنا
الآن أسماء بعضها نقول إن كانتور يرمز بحرف الألف العبري لأصغر
الأعداد اللامتناهية العاده وسنكتب بدلاً عنه حرف أ . بينما يرمز بحرف
w اليوناني لأصغر الأعداد اللامتناهية المرتبة .

إن أصغر الأعداد اللامتناهية العاده المرموز له بحرف أ عدد يحصر جميع
الأعداد المتناهية . بعبارة أخرى إذا اعتبرنا أن كل الأعداد المتناهية تؤلف
« مجموعة » (Set, Ensemble) وهذه المجموعة لا يمكن بالطبع حصر
أفرادها بالإستقراء لأنه مهما وصلنا الى عدد صحيح فإنه يوجد بعده
عدد آخر ، فإن هذه المجموعة لكل الأعداد الصحيحة التي نرمز إليها
بحرف أ هي أول أعداد اللامتناهي وأصغرها جميعاً .

لننظر الآن في تطبيق بعض العمليات الحسابية المألوفة على هذا اللامتناهي
العاد الأصغر لتبين عدم جدوى هذه العمليات المألوفة لدينا في هذا
الميدان الجديد ميدان اللامتناهي :

$$1 = 1 + 1$$

$$1 = n + 1$$

$$1 = 1 + 1$$

$$1 = n \times 1$$

$$1 = 1 \times 1$$

$$1 = n$$

الخ ...

هذه نظرة عابرة من الخارج الى نظرية المجاميع بالقدر الذي نفهم به عدم فاعلية العمليات الحسابية المألوفة في مجال الأعداد اللامتناهية والتي تبين خاصية من خواص اللامتناهي سبق أن تنبه اليها بولزانو وهي أن الكل يساوي جزءه وهذا واضح من المعادلات السابقة. هذا بالإضافة الى أن ما ذكرناه عن هذه النظرية يكفي لكي نفهم بعض ما أثارته من ضجيج بين الرياضيين عند تعمقهم هذه النظرية في كل فروعها واكتشافهم لنقائض Paradoxes فيها حتى الجدال حولها ، وأسالت ولا تزال تسيل المداد وحركت أقلام الرياضيين والفلاسفة المنطقيين الى الآن لتقويم ما أعوج من النظرية . وكل هذا يقودنا الى صميم المسألة الأساسية التي نتبعها دائماً هنا وهي مناهج الرياضة وأسسها .

ففيما يختص بالنقائض التي تتضمنها النظرية نذكر على سبيل المثال التناقض الذي تنبه اليه الرياضي الايطالي بيورالي فورتي Burali Forti وهو أول تناقض ظهر في النظرية وكان ذلك عام ١٨٩٧ .

فالنظرية التاسعة والأربعون في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور تقول : إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيباً تصاعدياً بحيث

أنه من بين كل عددين منهما أياً كانا يوجد دائماً عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد .

فيقول بيورالي فورتى إذا أخذنا هذا العدد الأخير كطرف وحيد في المقارنة فلا بد أن يكون وفقاً للنظرية نفسها — باعتباره عدداً مرتباً لا متناهياً — أقل من عدد آخر لا نعلمه ، وأذن فأكثر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ، وهذا تناقض في هذه النظرية ٤٩

مثال آخر للتناقض ما كشفه برتراند راسل Bertrand Russell الفيلسوف المنطقي المعاصر في نظرية من نظريات كانتور في العدد العاد المتناهي التي تقول أن كل عدد منته باعتباره مجموعة (Set أو Class) لا يشتمل على ذاته كجزء منها . فيقول راسل إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المتناهية كلها (أي مجموعة كل المجاميع العددية) هو في آن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضاً كجزء من ذاته ، وهذا تناقض . فهو لا يشتمل ذاته لأنه أكبرها وفقاً للنظرية . ولكنه أيضاً يشتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع أي إحدى المجاميع التي لا تشتمل على ذاتها . لتقريب هذا التناقض نقول : إذا جمعنا كل فهرس مكتبات العالم في هذه الحجرة بحيث لا يبقى فهرس خارجها ، فنحن لدينا جميع الفهارس (أي كل المجاميع Sets) للمكتبات . الآن نضع فهرساً لكل الفهارس الموجودة بالحجرة ، فهذا هو المجموعة لكل المجاميع . هذا الفهرس الكلي هو في آن واحد فهرس لكل الفهارس وأيضاً واحد من تلك الفهارس باعتباره فهرساً . بعبارة أخرى هو في آن واحد لا يشتمل على ذاته كجزء لذاته وأيضاً يشتمل على ذاته كأحد الفهارس ، وهذا تناقض .

إلى آخر ما هنالك من نقائص أخرى تنبه إليها الرياضيون . وواضح أنه

يترتب على تلك النقائص وجود خلل ما في نظريات أو قضايا نظرية المجاميع ، يجب إما إصلاحه وإما رفض النظرية الكانتورية برمتها إذا استعصى الإصلاح . وسواء أكان الموقف اللاحق إصلاحاً أو رفضاً لهذه النظرية فإن الأمر الثابت الأكيد أن المذهب الحسابي قد ظفر من هذه النظرية بتأييدها له بطريقة غير مباشر بأن الأعداد الطبيعية هي حجر الزاوية في تأسيس الرياضيات بما فيها الهندسة عند التحليليين .

- (٢١) -

تبعنا الى الآن خطوات تمحيب الرياضة والابتعاد بها نهائياً عن حدس الاتصال الهندسي ، ونوهنا بما لنظرية جورج كانتور من فضل في ترسيخ ألفة الرياضيين للأعداد دون الأشكال الهندسية رغم ما ظهر من نقائص في هذه النظرية .

وواضح أن الأبحاث في أسس الرياضة لم تتوقف عند الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي القائل بأن الأعداد الطبيعية أو الصحيحة هي كل شيء في الرياضة واليها يرد كل شيء آخر فيها .

ففي السنوات الأخيرة من القرن الماضي تشعبت الأبحاث في أسس الرياضة عند الرياضيين الى تيارين ، فأما أحدهما فقد ظل مغمضاً عينيه عن نظرية جورج كانتور وبدأ من الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي وهي أن الأعداد الصحيحة هي أساس كل شيء في الرياضة فلم يشأ هذا التيار أن يتوقف عند هذه الأعداد كنقطة بدء يقينية للرياضة وإنما حاول أن يقسم اليقين الرياضي كله على أساس المنهج المعبد في الرياضه منذ القدم ألا وهو المنهج الأكسيوماتيكي ، فبحث عن مسلمات لسلسلة الأعداد تستمد السلسلة يقينها منها ومن وراثتها أيضاً الرياضيات بخلافيرها كما رتبها المذهب

الحسابي . وبالطبع في مثل هذا البحث الذي أصبحت المسألة الملحة فيه هي مسألة يقين منطقي يصبح للمنطق الصوري دور هام في تكوين المسلمات كما لمسنا هذا عند كلامنا عن مسلمات الهندسات .

أما التيار الرياضي الآخر فقد بدأ من نقائص نظرية جورج كانتور وحاول علاجها أو على الأصح حاول تقويم النظرية نفسها بالطرق الأكسيوماتيكية أيضاً واستعان كذلك بالمنطق الصوري ، وأن كان هذا التيار جزئياً وموضعاً في داخل نظرية المجاميع نفسها ومن أجل تقويم النظرية وحدها .

وهكذا وجدت الرياضة نفسها مسوقة بالضرورة عند التماس أساس لليقين إلى الاستعانة بالمنطق الصوري الذي أصبح له منذ ذاك الوقت دور هام في كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة .

لقد كان هذا الإنشعاب إلى التيارين المذكورين كما قلت بين الرياضيين منذ أواخر القرن الماضي وقد استمر في القرن العشرين .

ولكن ما أن بزغ القرن العشرون حتى التقى التياران المذكوران في نزعة ثالثة ومخالفة عند بعض الفلاسفة ذوي العقلية الرياضية هم أصحاب التيار اللوجستيقي أو المنطقي الصرف والذي يؤسس الرياضة على المنطق الصوري وحده ، وأشار هنا إلى برتراند راسل وهويتهد والآخذين عنهما .

ولقد أحدث هذا التيار المنطقي رد فعل عنيف عند إمام الرياضيين المحدثين في فترة ما بين الحربين وهو ديفيد هيلبرت أستاذ الرياضة بجامعة برلين (توفي عام ١٩٣٧) فحاول في تيار رابع أن يستقل بالرياضة عن المنطق كما حاول ألا يعود إلى أساس كحدس الاتصال الذي فارقت الرياضة منذ فترة طويلة فلجأ إلى الطريقة الأكسيوماتيكية وجاء باكسيومايتك جديد لا إلى المنطق ولا إلى الرياضة ، أعني بمعالجة لرموز لا تتسبب إلى أي من العلمين

المذكورين وحاول أن يشتق منه المنطق والرياضة سوياً .

ثم ما لبث أن ظهر على المسرح طلائع الرياضيين المعاصرين الذين لم يرضوا عن هذين الأساسين المنطقي (التيار الثالث) والأكسيوماتيكي (التياران الثاني والرابع) فحاولوا الرجوع بالرياضيات الى الوراء ، الى ما قبل المذهب الحسابي ، فالتمسوا أساساً للرياضيات فيما سبق للرياضيات الحديثة أن تخلت عنه وهو « الحدس الرياضي » كأساس ومنبع أصيل ودائم لها ، وبذلك عادوا الى التقاليد القديمة في الرياضيات .

فهذه خمسة تيارات أو مذاهب يجب الإشارة اليها لكي نستكمل الصورة التي نكونها عن مسألة أسس الرياضة في الوقت الحاضر . ولكنتنا نختم هنا بالكلام عن التيار الأول وحده لأنه مكمل للمذهب الحسابي ولأننا في هذا الفصل بالذات أردنا بيان مسألة « تحسب الرياضة وأكسيوماتيك الحساب » . فالى هذا الأكسيوماتيك نوجه الآن الانتباه :

إذا كانت الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابي هي أن الرياضة إنما ترد بحذاويرها الى العدد الصحيح فلا غرابة في أننا نجد رياضي ذلك العصر لا يقبلون كعنصر حقيقي في الرياضة كلها إلا الأعداد الصحيحة . وهكذا وقف رياضيو ذلك العصر أمام الأعداد موقف الأكبار والتقديس باعتبارها اليقين كله . وهذا ما جعل رياضياً كبيراً مثل كرونكر يقول في عبارة مشهورة : « الأعداد الصحيحة تأتينا من عند الله وكل ما عداها فهو من تأليف الإنسان » .

ولكن الرياضيين الذين حرصوا على تأسيس علمهم على أسس وثيقة بعيدة عن الحدس لم يقتنعوا بنتيجة ثيولوجية كالتى انتهى اليها كرونكر . حقيقة إن مبدأ ضرورة تحسب التحليل قد أسبغ على العدد الصحيح قيمة مطلقة

ووجوداً أولياً وموضوعياً أكثر مما أعطى للرموز الرياضية الأخرى التي يتناولها الرياضيون . ولكن ألا يمكن للرياضيات أن تكون مرة أخرى فريسة حدس جديد يجعلنا نشق ببداهة الأعداد الصحيحة ونستمد يقين الرياضة من مثل هذه البداة الحدسية ؟ ثم ألا يمكن النظر الى العدد الصحيح نفسه على أنه غير بديهي الى هذا الحد وأنه قد يقبل تحليلاً آخر يقودنا هذه المرة الى أبعد من حدود المذهب الحسابي والرياضة بخدافيرهم ويمكننا من تأسيس الرياضة كلها على أسس أوثق ؟ هذا هو المبدأ الذي يبدو أنه سيطر على كل الابحاث الخاصة بأسس الرياضة عند الرياضيين والفلاسفة على السواء ، منذ أواخر القرن الماضي وبخاصة فيما يتعلق بأكسيوماتيك الحساب .

فمن الواضح أن تأسيس فكرة الأعداد على أسس أكسيوماتيكية إنما يكسب هذه الفكرة عند أولئك الرياضيين الذين يلجأون الى هذا المنهج الذي عرفته الرياضة منذ القدم كأوثق منهج لها ، إنما يكسبها دقة ووضوحاً و يقيناً أوفى ، يتشر من المسلمات عبر الأعداد الصحيحة الى كل أجزاء الرياضة الأخرى باعتبارها قد ارتدت في المذهب الحسابي نفسه الى الأعداد الصحيحة .

هكذا نرى بيانو Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو يحاول اقتفاء طريقة مورترز باش Moritz Pasch أبي الأكسيوماتيك الحديث فيعطينا أهم أكسيوماتيك للعدد الى الآن : فيختار حدوداً أولية ثلاثة هي : الصفر - العدد - التالي Successeur ، وخمس مسلمات هي بمثابة العلاقات المنطقية التي تبين استعمال تلك الحدود . ومن ثم الأكسيوماتيك الآتي لنظرية الأعداد :

١ - الصفر عدد .

٢ - التالي لعدد عدد .

٣ - ليس لعددین ما نفس التالي .

٤ - ليس الصفر تالياً لأي عدد .

٥ - كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه باعتباره عدداً فهي تصدق

على العدد التالي له ، كما تصدق على التالي لمسا يليه وهكذا .

نلاحظ أن هذه المسلمة الأخيرة هي التي تتضمن اطراد العمليات

الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً . وقد سمي هنري بوانكاريه هذه

الخاصية « الاستقراء الرياضي » Induction Mathematique أو الإستقراء

بالتكرار Induction Par recurrence كما أسماها برتراند راسل الخاصية

الوراثية (Propriété Hereditaire) للأعداد أي أن ما يصدق على

عدد ينتقل بالوراثية الى غيره .

على كل حال أصبح أكسيوماتيك بيانو كلاسيكياً عند الرياضيين

وغيرهم بحيث يدعيه لأنفسهم كثيرون من أمثال ديدكند مثلاً ، كما نجده

مذكوراً في كل الأبحاث التي تتحدث عن أكسيوماتيك العدد . وقد قدم لهذا

الأكسيوماتيك في مصنفات بيانو تحليل منطقي بالطرق الرمزية (Symbolic)

التي أدخلها جبر المنطق في القرن الماضي لقضايا الرياضة . بحيث تتحول

الى قضايا منطقية صرفة . وكان هذا كله بالطبع نقطة البداية لقيام اللوجستيقا

(المنطق الرياضي) Logistique عند راسل في القرن العشرين .

على أن أكسيوماتيك بيانو لم يكن الأكسيوماتيك الوحيد للعدد إذ يمكن

أن نحصى ما لا يقل عن اثني عشر أكسيوماتيك آخر للعدد عند رياضيين

ومناطق من أمثال لاندو Landeau وهلبرت وبادوا Padoa وهنتجتون

Hantington وكونج Konig وغيرهم .

ولا يغيب عن البال أن المذهب الحسابي بانتهائه الى «أكسيوماتيك العدد» إنما يكون قد أነع ثمرته الأخيرة وأدى رسالته المنتظرة وهي أن الرياضة بابتعادها نهائياً عن الحدس المكاني إنما تصبح علماً مجرداً وصورياً يقوم على طائفة من الحدود والمسلمات الأولية التي ترد اليها سلسلة الأعداد الصحيحة ثم ما يليها من الأعداد كما رتبها المذهب الحسابي .

هذا فيما يختص بأكسيوماتيك العدد الذي ختمنا بنظير له في الفصل السابق عن الهندسة عندما تكلمنا عن الأكسيوماتيك فيها . وكان ينبغي الوقوف عند هذا الحد كما يتضح من إشارتنا في عنوان هذا الفصل لولا أنه لابد من كلمة أخيرة عن التيار الثاني الخاص بأكسيوماتيك نظرية كانتور . هو تيار موضوعي أي خاص بهذه النظرية وحدها . وقد تزعم رزميلو Zermelo حركة تقويم ما اعوج من نظرية المجاميع وذلك بتأسيسها على مسلمات ، وتبعه في هذه المحاولة الأكسيوماتيكية الكثيرون من أعلام الرياضيات المعاصرة أمثال هاوسدورف Felix Hausdorff وكونج Konig وهاينكل Haenkel وغيرهم . وقد حاول هذا التيار تحاشي النقائص التي ذكرنا نموذجاً لها وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بين قضاياها . فاستخرج زرميلو مثلاً المسلمات المتضمنة لها عند كانتور وأضاف إليها مسلمتين : تسمى أحدها مسلمة الانتقاء Axiome de selection وتسمى الأخرى مسلمة الرد أو الارجاع (Axiome de Reductibilité) . ومع ذلك لم تسلم المسلمات من نقد الرياضيين كما أنها لم تستطع أن تتجنب النقائص تماماً .

أما التيارات الثلاثة الأخرى فسفرد لها مكاناً أوسع فيما يلي وسنهتم بصفة خاصة بالتيار اللوجستيقي لصلته الواضحة بالفلسفة ولأنه قطب الرحي بالنسبة للتيارين اللاحقين اللذين يعتبران ردود فعل عليه .

الفصل السادس

المذاهب المعاصرة في أسس الرياضة

(٢٢) معنى المذهب اللوجستي. (٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضي.
(٢٤) عرض لحساب القضايا الأولية في اللوجستيقا . (٢٥) اشتقاق
العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق . (٢٦) المذهب
الأكسيوماتيكي . (٢٧) المذهب الحدسي والمذهب الحدسي الجديد .

- (٢٢) -

أشرنا في ختام الفصل السابق الى أن مسرح الأبحاث المعاصرة في أسس
الرياضة تتنازعه منذ بداية القرن العشرين ثلاثة تيارات هامة يأتي المذهب
اللوجستيقي في مقدمتها لأنه أسبقها تاريخياً في ظهوره فوق هذا المسرح ،
ثم لأن الخلاف حوله هو الذي حدد ظهور المذهبين الآخرين كردود فعل
عليه من قبل الرياضيين وهما المذهب الأكسيوماتيكي بزعامة ديفيد هيلبرت
والمذهب الحدسي الجديد بزعامة بروور (Brouwer) .

نريد الآن أن نوجه الانتباه الى المذهب اللوجستيقي وحده . أنه
مذهب اتخذ له أحياناً عند صاحبه برتراند راسل اسم « الفلسفة العلمية »
(Scientific Philos .) وهو اصطلاح له ما يبرره : فإن نجاح منهج العلم

جعل بعض الفلاسفة يحلمون بفلسفة علمية (دون أن يطلقوا هذا الاسم) ، أعني يحلمون بفلسفة يمكنها إذا اصطنعت لنفسها منهج العلم أن تصل الى مثل ما وصلت اليه العلوم المتقدمة من يقين ومن نتائج ثابتة تنمو مع الأيام . ومنذ فجر الفلسفة الحديثة حينما كانت الرياضيات أسبق العلوم نضجاً نرى ديكارت أبو الفلسفة الحديثة يكرس المنهج الرياضي ويتخذ منهجاً لفلسفته وللوصول الى اليقين حتى في الطبيعيات . وعلى العكس من ذلك حينما نضجت الطبيعيات للاستقلال عن أمها الفلسفة عند نيوتن نرى فلاسفة متأثرين به من أمثال لوك وهيوم يدعون الى منهج التجربة ويلجأون الى التجربة الحسية وما يستمد منها من معان وأفكار لاقامة حقائق الفلسفة . هناك إذن دائماً محاولات متجددة لاقامة فلسفة علمية ، بمعنى فلسفة تستند الى منهج أحد هذين العلمين المتقدمين في الطليعة بالنسبة الى العلوم كلها وهما الرياضيات والطبيعيات .

والمذهب اللوجستيقي فلسفة علمية بهذا المعنى ، لأنه حين أراد أن يسهم في الحركة الفكرية المعاصرة حول أسس الرياضيات اصطنع لنفسه أولاً وقبل كل شيء آلة رياضية دقيقة لتحليل المسائل المعروضة عليه هي المنطق الرياضي (المسمى ايضاً لوجستيقاً) وهو المنطق الذي تسليح بسلاح الرياضة نفسها ، أعني تسليح بأدق الرموز وبالعمليات الحسابية المختلفة مبتعداً بذلك عن استعمال اللغة والاقيسية اللغوية على غرار أخته الرياضة ، حتى أصبح قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضة نفسها بلغة المنطق وحده وعلى تحليل أسسها التي انتهت اليها في المذهب الحسابي وردها برمتها الى حدود المنطق وقضاياها الصرفة ، فأثبت بذلك المذهب اللوجستيقي نظريته الأساسية بطريقة علمية بحتة لا أثر للفلسفة فيها وهي أن الرياضيات الحالية Pure Mathematics ليست إلا فرعاً من المنطق الصوري ولا شيء .

فيها غير صور المنطق وحده أي ثوابته Constants . وإذا صدق هذا الرأي فإن التمييز التقليدي بين العلمين - الرياضيات والمنطق - ولو أنه قائم ووطيد إلا أنه تمييز معتسف ومصطنع.

هذه هي الفلسفة العلمية التي دعا إليها منذ أوائل هذا القرن الفيلسوف الإنجليزي برتراند راسل في كتابه مبادئ الرياضيات Principles of Mathematics (١٩٠٣) ثم في كتابه الثاني بالاشتراك مع هويتهد بنفس العنوان مكتوباً باللاتينية Principia Mathematica الذي ظهر في ثلاثة أجزاء (من ١٩١١ الى ١٩١٣) . وتسمى تلك الفلسفة أيضاً (لا عند صاحبها وإنما عند المؤلفين الآخرين من الرياضيين والفلاسفة الذين يتعرضون اليوم للكتابة في موضوع أسس الرياضيات) بالمذهب اللوجستي أو النظرية اللوجستية (Logistic Theory) في أسس الرياضيات ، وذلك ليس بالنظر الى أن هذه العبارة تتضمن الإشارة الى المنطق في صورته الرياضية الجديدة فهذا كان يكفي فيه أن يسمى المنطق الرمزي Symbolic logic او المنطق الرياضي Mathematical logic كما اصطلح راسل نفسه ، ولكن سميت بالنظرية اللوجستية إشارة الى شيء أبعد من مجرد المنطق . أعني الى تلك النظرية الأخرى الجريئة القائلة بأن الرياضيات الحالية ليس فيها شيء غير عناصر المنطق الصوري وحده ، وأنها تشتق منه كفرع له في نسق علمي واحد ، وكذلك أيضاً إشارة الى أن حل نقائص الرياضيات المعاصرة التي سبق أن نوهنا عنها إحتاجت الى قيام نظرية أخرى لهذا الغرض وحده سماها راسل نظرية الأنماط Theory of Types ، أدخلها في ذلك النسق الموحد كطريقة لحل النقائص الرياضية ولم تعرف نظرية الأنماط هذه إلا في هذا النسق وحده ، وهذان الوجهان للمذهب اللوجستي : رد الرياضيات بحذاقها الى المنطق الصوري ثم حل نقائص الرياضيات بإقامة نظرية كالأنماط ليسا من المنطق .

في شيء ولا يمتان بصلة الى المنطق في ذاته من حيث هو كذلك إذ هنا غرضان زائدان عن حاجة المنطق ويمكن للمنطق أن يقوم بدونهما ، ولا يخصان إلا هذه الفلسفة العلمية المعينة التي عرفت « بالنظرية اللوجستيقية » في كل المؤلفات المعاصرة ، ولذلك يجب استبقاء هذه التسمية للدلالة على هذه النظرية . ومع ذلك فإن النظرية اللوجستيقية هذه ليست جديدة كل الجدة ولم تنبع كاملة بمخاديرها من رأس برتراند راسل كما نبعث بالاس أثنيه من رأس زيوس في أساطير اليونان ، فقد سبقتها محاولات جادة في هذا الاتجاه . ولذلك يستحسن أن نقسم خطوات عرضنا لهذه النظرية على الوجه الآتي :

الخطوة الأولى نخصصها للمحة تاريخية في معالم الطريق الذي انتقل فيه المنطق الصوري من علم لغوي نقيس فيه بالالفاظ الى علم رياضي نحسب فيه الاستنباطات كما نحسب في الرياضة .

والخطوة الثانية إشارة الى أنواع الحساب المنطقي مع تخطيط لهيكل الحساب الأول منها الذي يستند إليه البنيان اللوجستيكي كله .

والخطوة الثالثة بيان طريقة اشتقاق الرياضة البحتة من المنطق الصوري وهو الموضوع الأساسي في فلسفة الرياضة من وجهة نظر هذا المذهب في بحثنا هذا ، مع مناقشة أيضاً لبعض نقط هذا الموضوع . وبهذا نستكمل الصورة التي يمكن أن تعرض فيها هذه النظرية .

- (٢٣) -

لفظ « لوجستيقا » (Logistica) معروف عند القدماء للدلالة على جداول يحد فيها الحاسبون نتائج العمليات الحسابية جاهزة دون تكبد

اجرائها وتذكرنا بجداول اللوغارتمات اليوم . ثم اطلق استعمال اللفظ منذ مؤتمر الفلسفة الدولي المنعقد في جنيف عام ١٩٠٤ للدلالة على المنطق المعاصر في صورته الرياضية . كما يطلق عليه أيضاً « المنطق الرياضي » (Mathematical logic) و « المنطق الرمزي » (Symbolic logic) . وتوجد مجلة يصدرها تحت هذا الاسم الأخير اتحاد المناطق منذ ١٩٣٧ بنجاح كبير في امريكا (Journal of symbolic logic) .

أما عند مؤلفي القرن التاسع عشر الذين لهم الفضل في إيقاظ المنطق من سباته الطويل وإرسائه على قواعد حسابية (Calculus) فقد كان الاسم الشائع له هو جبر المنطق (Algebra of logic) .

وفي مجال هذا الجبر سبقت محاولات جادة أيضاً عند الفيلسوف والرياضي ليبنتز (Leibniz) في القرن السابع عشر وكانت كتاباته المختلفة في هذا الموضوع محاولات فيما كان يحلم به من تأسيس علم أعم من الرياضيات ، فيه يتحول الاستنباط الى حساب ، سماه حيناً الرياضة العامة Mathematique Universelle وحيناً آخر الابدعية العامة Caractéristique Universelle . فهو أول من نظر الى المنطق كأساس ترد اليه كل معرفة تريد أن تكون يقينية ومنها الرياضيات بالطبع . ولذلك ليس غريباً أن نجد اللوجستيين في بداية أمرهم يؤلفون في منطق لايبنز وينشرون آراءه المؤيدة لموقفهم . فبراتراند راسل ولويس كوتوراه وتلاميذ بيانو أهتموا جميعاً بدراسته وبالتنقيب عن مخطوطاته المنطقية المحفوظة في مكتبة هانوفر حيث عاش ، ويعتبر بحق عند اللوجستيين الأب الحقيقي للوجستيقا أكثر مما يعتبر جبريو المنطق في القرن التاسع عشر ذلك لأن ليبنتز أهتم برد قضايا المعرفة وعلى رأسها القضايا الرياضية إلى المنطق الصوري وهذه هي النظرية المشتركة بينه وبينهم . ثم إنه بين أنه لا يمكن برهان تلك

النظرية إلاّ إذا توافر مقدماً أمران : أداة رمزية وثيقة وحساب منطقي .
أما فيما يختص بإدخال الرمز إلى ميدان المنطق فقد كفلت ذلك عبقريته الرمزية
في الرياضة التي كانت مثلاً يحتذى عند الرياضيين وعاملاً من عوامل تقدم
الرياضيات وانتشارها في أوروبا كلها وتدين له الرياضيات بالكثير من رموزها .
وفيما يختص بالحساب المنطقي فقد عالج معالجات رياضية طائفة من العلاقات
التي لا تعنى بها الرياضة والتي هي من صميم المنطق مثل علاقات الذاتية
(Identité) والتضمن أو الاحتواء (Inclusin) والمساواة واللامساواة
وأكبر من ، وأصغر من ، والفضل ، والوصل ، وغير ذلك مما يحدد المنطق كحساب
رياضي للاستنباطات . فتناول كل علاقة من هذه العلاقات في حساب منفصل .
ويعلق لويس كوتوراه في كتابه القيم عن منطق لينتز (La logique de Leibniz)
بأن النتائج التي توصل إليها هذا الفيلسوف الرياضي قبل إقرنين من ظهور جورج
بول تشهد بأنه كان أكثر تفوقاً وتقدماً بالقياس إلى ما وصل إليه جورج بول
Boole مؤسس جبر المنطق في القرن التاسع عشر الذي قدم للوجستيقا .
لم تترك أبحاث لينتز في جبر المنطق أثراً على المناطق اللاحقين وظلت
أبحاثه المخطوطة حبيسة مكتبة هانوفر حتى اكتشفها اللوجستيقون منذ أواخر
القرن الماضي ، لذلك نجد أن مواطنه الفيلسوف الكبير إيمانويل كانط الذي
كتب بعده بنحو قرن تقريباً لم يفتن إلى إمكان تطور المنطق إلى حساب
إذ كان يجهل تماماً أبحاث سلفه لينتز المبتكرة التي نقلت المنطق خطوة أكيدة
وكبيرة إلى الأمام ، فقرر في نظرية غريبة له في مقدمة الطبعة الثانية من كتاب
(نقد العقل الخالص) أن المنطق دخل الطريق العلمي الأكيد وولد كاملاً منذ
أرسطو لأنه لم يحتاج أن يتقهر إلى الوراء ليراجع أخطائه ويصححها كما
أنه لم يأت فيه مؤلف بجديد منذ ولادته . وما سر ولادته كاملاً على هذا
النحو من أول خطوة له إلا بساطة موضوعه كما يقول حيث لا ينظر العقل

إلا في صور تفكيره وحسب .

ولكن سرعان ما تبددت نظرية اكتمال المنطق هذه وأصبح المنطق الذي اعتبره كانط منتهياً مقفلاً على نفسه منذ أرسطو أكثر العلوم حركة وتجدداً منذ ظهور كتاب جورج بول وعنوانه *An Investigation into the laws of Thought* في عام ١٨٥٤ الذي وضع فيه بول أساس نظرية « جبر المنطق » ثم أصبح بعده البحث في هذه النظرية حركة عالمية اشترك فيها مؤلفون في إنجلترا من أمثال جيفنز Jevons وفن Venn وفي ألمانيا مثل شرويدر Schroder وفي أمريكا مثل شارل ساندرس بيرس Peirce وفي فرنسا مثل لويس كوتوراه وفي إيطاليا مثل بيانو Peano وتلاميذه الكثيرون . ولا يزال المرجعان الأساسيان في هذه النظرية : المؤلف الضخم لشرويدر *Algebra der logik* (من ١٨٩٠ إلى ١٩٠٥) والكتاب الموجز القيم لاويس كوتوراه وعنوانه *Algèbre de la logique* (١٩٠٥) وبهذين المؤلفين توقفت الأبحاث في هذه النظرية بعد أن ظهر على المسرح المنطق الرياضي المعاصر (اللوجستيقا) عند راسل لأن جبر المنطق هذا اتضح أنه فصل من فصول المنطق الرياضي يقابل حساب « الفئات » (*Calculus of Classes*) وبذلك أصبح جزءاً من نظرية أوسع .

في جبر المنطق الذي أعاد اكتشافه في القرن الماضي جورج بول دون أن يعلم شيئاً إطلاقاً عن كتابات لينتز تتغير بعض العمليات الحسابية عن « شيلتها » في الجبر المألوف وخاصة عمليات الجمع والضرب وهذا التغير بالاضافة الى القوانين المترتبة على تلك التغيرات أهم ظاهرة في هذا الجبر .

إلا أن هذا التغير أو قل هذا الإنحراف عن المألوف في الجبر العادي لم يعد أمراً غريباً في رياضيات ذلك العصر . فإن المبدأ الذي كان يعتنقه الرياضيون

الى منتصف القرن الماضي الخاص بضرورة اطراد العمليات الرياضية اطراداً لا يتخلف في كل نظريات الرياضة أصبح مبدأ كان لا بد لهم من التخلي عنه لكي تسير الرياضيات قدماً الى الأمام كما تخلت الهندسة من قبل - وقد رأينا هذا - عن مبدأ بقاء المسلمات في الهندسة على حالها عندما أدخل الهندسيون تغييرات فيها أدت الى هندسات أخرى لم تكن متوقعة. مثل الهندسات غير الأقليدية . ولم يكن جبر المنطق وحده هو الذي انحرف من معاني عمليات الجبر المألوف ، فلقد نشأت في ذلك العصر نظريات جبرية أخرى تختلف عن الجبر المعتاد في عملياتها وقوانينها مثل نظرية الأعداد الرباعية Quaternions عند روان هاملتون والحساب الهندسي Calcul Géométrique عند جراسمان ونظرية المجموع Sets عند جورج كانتور وربما غير ذلك .

إن أهم ما يفرق بين جبر المنطق والجبر المعتاد هو ما أسماه بول قانون الثنائية Law of Duality الذي يقرر أن هناك ثنائية جبرية (ومن ثم جاء الاسم ، كما أسماه أيضاً اللوجستيقيون قانون التوتولوجيا Tautology أو اللغو أو التكرار غير المفيد) بين الجبر العادي وجبر المنطق :

ففي الجبر العادي :

$$\text{ص} + \text{ص} = \text{ص}$$

$$\text{وكذلك} \quad \text{ص} \times \text{ص} = \text{ص}$$

بينما في جبر المنطق إذا دلت ص لا على عدد كما في الرياضة وإنما على « فئة » منطقية (Class) كفرقة إطفاء المدينة أو كسكان قطر من الأقطار مثلاً ، فإن تكرار هذه الفئة مهما كانت صورتها أعني بالجمع أو بالضرب لا يغير شيئاً من الفئة ذاتها إذ تظل كما هي عليه نفس الفئة : أعني نفس فريق الإطفاء

أو نفس سكان القطر . وعلى هذا يكون في جبر المنطق :

$$ص + ص = ص$$

$$ص \times ص = ص$$

وهكذا يساوي الكل جزأه . وهذا تعديل جوهري في قانون التبادل Law of Commutation المعروف في الجبر المعتاد . وكذلك ينحرف جبر المنطق أيضاً عن قانون التوزيع Law of Distribution المعروف في الجبر العادي . والتوزيع الذي يجمع بين الجمع والضرب له صيغتان في جبر المنطق :

$$(1) \quad 1 (a + b) = a + b$$

$$(2) \quad 1 (a + b) = (a + 1) (b + 1)$$

والصيغة الأخيرة وحدها تميز جبر المنطق ولا تستقيم في الجبر المعتاد بحيث يمكن وصف هذا الجبر الجديد بأنه نصف توزيعي بالإضافة الى أنه توتولوجي (بالنسبة للتبادل) . وهاتان الخاصتان المميزتان لهذا الجبر من خواص اللوجستيقا أو الحساب المنطقي أياً كان .

لا أريد الاستطراد الى أبعد من هذا في تناول هذا الجبر أكتفاء بالإشارة إلى خصائصه العامة المميزة له . ولقد حقق جبريو المنطق في علمهم هذا حلم لينتز في رياضة عامة أو أبجدية عامة فيها تتحول الاستنباطات إلى حساب وقدموا بذلك الأداة الفنية لتحليل النسق العلمية تحليلاً منطقياً أو أن شيئاً علمياً أيضاً مما أفادت منه المدرسة اللوجستيقية كل الفائدة . ولكن الأبحاث في هذا الجبر قد توقفت في أوائل هذا القرن بمناسبة ظهور اللوجستيقا على المسرح الذكري . وفي الواقع كان جبر المنطق جبراً أكثر منه منطقاً في الكثير

من جوانبه: في طريقة حل مسائله، وفي احتمال تفسير نتائجه تفسيراً مزدوجاً أعني إما عددياً وإما منطقياً، هذا بالإضافة أيضاً الى احتمال التفسير المنطقي نفسه لتفسيرين في آن واحد أحدهما تفسير بالفئات (Classes) والآخر بالقضايا Propositions وهناك فارق كبير بينهما طبعاً. ومن ثم يمكن القول بأن جبر المنطق لم يكن منطقاً إلا بالعرض، أي بإلزامه تفسيراً منطقياً ليس الوحيد له. وهذا النقص الذريع راجع إلى عدم تكشفه عن «الثوابت» المنطقية الهامة التي بدونها لا يتأكد المعنى المنطقي «كالتضمن» مثلاً.

أما التكشف عن أهم الثوابت المنطقية الضرورية لاستكمال منطق رياضي فيرجع إلى مؤلفين اثنين أحدهما بيانو Peano في إيطاليا وآخرهما فريجه Gottlob Frege في ألمانيا.

أما بيانو فكان أستاذاً لعلم التحليل في جامعة تورينو وأهتم بحركة أسس الرياضة وساهم هو وتلاميذه في تأسيس مسلمات الهندسات كما ساهم في أكسيوماتيك العدد. وفيما يختص بدوره في جبر المنطق كان كتابه Formulaire de Mathématiques (١٩٠٤-١٩٠٨) أكثر تقدماً من حيث دقة رموزه كما تكشف عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل «المتغيرات» Variables في كل صيغ المنطق بحيث أصبح المنطق قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضة كلها برموزه وحدها.

أما جوتلوب فريجه فهو منطقي ألماني وفي كتبه المتلاحقة عن رموز المنطق وعن أسس الحساب التي امتد صدورها من ١٨٧٩ حتى سنة ١٩٠٣ تفرغ لمسألة أسس الرياضة التي تركها مذهب تحسب الرياضة عند الأعداد الصحيحة. ورآى أنه يمكن استناداً إلى تعريف للعدد شاع عند رياضيين من أمثال ديدكند

وكانتور أن يرد هذا التعريف الى «ثوابت» المنطق الصوري وحدها بحيث يمكن استنباط الأعداد، ومن وراثتها الرياضيات كلها كما رتبها المذهب الحسابي، من مبادئ المنطق الصوري وحده، فكان فريجه بهذا هو الأب الحقيقي لجانب محدد من المذهب اللوجستيقي هو جانب اشتقاق الرياضيات من المنطق. وقد إحتاج هذا العمل منه أن يسلح المنطق نفسه بآلة رمزية دقيقة، وكانت با ثورة مؤلفاته عام ١٨٧٩ تكوين هذا المنطق الرمزي، ثم تابع عمله في مؤلفاته الأخرى عن أسس الحساب بأن اشتق الأعداد من المنطق.

إلا أنه لم يكن رياضياً كبيانو مثلاً ففشل حيث نجح بيانو من حيث أن رموزه التي اقترحها للمنطق رغم دقتها البالغة كانت غير رياضية بالمرّة ولا طليعة الاستعمال فوق أنها ثقيلة للغاية لأنها تمتد على غير المؤلف طولاً وعرضاً مما جعل مؤلفاته بمنأى عن القراء ولم يفد منها لاحق.

هذان التياران : تيار جبر المنطق بالرموز الطليعة مع إدخال المتغيرات مما يمتاز به أعمال بيانو، ثم تيار رد الأعداد التي انتهى اليها المذهب الحسابي كسند أخير للرياضة إلى ثوابت المنطق وحده عند فريجه، هذان التياران التقيا عند برتراند راسل صاحب النظرية اللوجستيقية في أسس الرياضة التي نحن بصدددها. ولقد أفاد راسل كل الإفادة من رموز بيانو وأضاف في التحليل المنطقي رموزاً أخرى هامة جداً في حين أنه كان يجهل تماماً أعمال فريجه في اشتقاق الأعداد من حدود المنطق وتصوراته. ولكن شيئاً ما في الجو الفكري آنشد أملي عليه نفس النكرة التي بعثت فريجه الى محاولتها، فحاول راسل نفس المحاولة في اشتقاق الأعداد من المنطق بقوة ووضوح نادرين وغير مسبوقين، وتناول هذا الموضوع مباشرة في كتابه الأول Principles of Mathematics الصادر عام ١٩٠٣ ثم مرة ثانية في كتابه بالاشتراك مع هويتهد Principia Mathematica

الصادر في ١٩١١/١٩١٣ . والفارق بين الكتابين هو أن الأول موجه إلى الفلاسفة وحدهم ومن ثم فهو مكتوب بلغة الكلام، أما الثاني فموجه إلى الرياضيين المهتمين بمشكلة أسس الرياضة ومن ثم فهو مكتوب كله بالرموز .

هناك مرحلتان لفهم المذهب اللوجستيقي: الأولى مرحلة فهم أصول هذه النظرية المنطقية بالقدر الذي يسمح بمتابعة فهم موضوع فلسفة الرياضة، والثانية مباشرة اشتقاق الرياضة من هذا المنطق...

ونبدأ فوراً بالمرحلة الأولى .

(٢٤)

نريد أن نلم سريعاً بهيكل المنطق الرمزي أو على الأصح بأول حساب فيه المسمى « حساب القضايا الأولية » الذي يستند إليه المذهب اللوجستيقي . وطبعاً نلجأ هنا إلى هذا المنطق في صورته التي أصبحت كلاسيكية تماماً بالنسبة إلى كل الأبحاث اللاحقة ، أعني نلجأ إلى واضعه برتراند راسل بادئين بنقطة هامة من كتابه الأول (١٩٠٣) .

فمنذ الصفحة الثالثة من هذا الكتاب يعرض راسل لتصوره الصوري أو المنطقي للرياضة فيخرج بذلك عن المؤلف عند الفلاسفة منذ كانط الذي يرد الرياضة إلى ما في تركيبنا الذهني (أو الحسي بالذات) من حدود للمكان والزمان تسمح بتركيب الأشكال وإنشاء الأعمال التي تبرر الأحكام التركيبية القبلية للرياضة ، فيبين راسل أنه لا حاجة بنا إلى القول بمثل هذا التركيب الذهني عند بحثنا في طبيعة الرياضة وأسسها ويدعو إلى إسقاطه من الاعتبار ، ويؤيده في ذلك أن تقدم الرياضة منذ حركة النقد الباطني فيها إنما

إن على حساب استبعاد كل حدس كما رأينا .

فيقول راسل في تعريفه لتصوره المنطقي لقضايا الرياضة : « إن الرياضيات الحالية هي مجموعة القضايا التي صورتها دائماً من نوع ل تتضمن م حيث ، وم قضيتان تشتملان على متغير يبقى بعينه في القضيتين ، وحيث لا تشتمل قضيتان على ثوابت غير ثوابت المنطق » .

ويجب ألا يفزعنا هذا التعريف فهو يريد أن يقول إن قضايا الرياضة الحالية أشبه بالقضايا الشرطية (وهذا معنى التضمن) التي لا تؤكد شيئاً ، عالمنا الخارجي كما هو الشأن في قضايا الرياضة التطبيقية المعبرة مثلاً عن حرارات وسرعات الخ ... وإنما تقول تلك القضايا الشرطية بكل بساطة « إذا » أخذت بالمقدم « فيلزم » عنه التالي ، أعني أنها كلها قضايا افتراضية تتضمن فيها الشرط جوابه دون أدنى اكتراث للوجود الخارجي . هذا وإذا جللنا تلك القضايا الشرطية فلن نجد فيها غير ثوابت منطقية Logical Constants ومتغيرات (Variables) أعني لن نجد غير صور منطقية صرفة لا تقول لنا شيئاً آخر غير المنطق .

إذا فهمنا هذا التعريف أمكننا أن نفهم بسهولة تعريفاً آخر عجيباً للرياضة الحالية يقول فيه راسل : « الرياضة الحالية هي العلم الذي لا نعرف فيه قط عم نتحدث ولا إذا كان ما نقوله فيها صادقا » . فنحن لا نعرف عم نتحدث لأننا لا نجد فيها غير المتغيرات والثوابت المنطقية دون أدنى مادة أخرى سواء في الخارج أم مادة حدسية في الذهن . ثم نحن لا نعرف إذا كان ما نقوله صادقاً لأن صادق القضايا المستنبطة يتوقف على صادق الفرض أو الشرط وصادق الشرط يتوقف بدوره على القيم المعينة التي تعوض عن

المتغيرات فيه . ولما لم يحدث ذلك التعويض فنحن لا نعلم إذا كان ما نقوله في الرياضه صادقاً .

بعد الفراغ من هذين التعريفين اللذين يباعدان بين تصور راسل المنطقي للرياضة وتصور الحدسيين أتباع كانط من الرياضيين الذين أصرّوا على قيام الرياضة على نوع من التجربة الذهنية تسمى « الحدس الرياضي » (حدس الأشكال المكانية والأعداد) نركز الكلام فقط على « الصور المنطقية » التي تسمى أيضاً « ثوابت » المنطق .

والصور المنطقية للقضايا والعلاقات المنطقية بينها والتي بواسطتها يتدرج الاستنباط من قضية الى أخرى هي كل موضوع المنطق :

والصورة المنطقية لأية قضية هي الصورة التي تشترك ومثيلاتها فيها . وهناك بالطبع صور منطقية عديدة للقضايا . فليست صورة القضية « سقراط فيلسوف أو رياضي » كصورة القضية « سقراط عاش قبل ارسطو » : فالأولى « قضية منفصلة » كما يقول المناطقة والثانية تعبر عن « علاقة » بين طرفين هي علاقة « عاش قبل » وكلتاهما قضية تختلف عن الأخرى . أن حصر هذه الصور المنطقية للقضايا من أهم ما يميز المنطق الرياضي المعاصر .

أما العلاقات بين القضايا فهي الشروط أو القواعد التي بمقتضاها نستنبط من صدق القضية ل مثلاً صدق قضية أخرى أو قضايا مثل ل ١ ، ل ٢ ، ل ٣ ... ففي منطق القياس التقليدي الذي يقوم على ألفاظ اللغة تنحصر تلك الشروط في قيام حد أوسط يشارك الطرفين في معناه (وإلا استحال القياس) وفي مراعاة الكم والكيف والسلب والإيجاب . أما في المنطق الرياضي وفي أبسط حساب فيه ونقطة بدايته أيضاً المسمى حساب القضايا أو حساب القضايا الأولية (Elementary Calculus of Propositions) فلا نظر

في حدود القضايا وبالتالي لا بحث عن حد أوسط يشترك الطرفان في معناه فكل هذه الحواجز اللغوية تسقط من الاعتبار ، وإنما تؤخذ القضايا جميعاً كوحدات كل وحدة منها غير منقسمة من داخلها أو محملة الى حدود (كال موضوع والمحمول) كملاً نظر إلى المعنى القاموسي كذلك ؛ ثم يرمن الى كل وحدة بحرف مثل الحرف ل أو م أو ن مهما كان طول القضية ومهما اختلفت القضايا فيما بينها في معانيها القاموسية ، فيحاول ذلك الحساب فقط بأن يحدد علاقات تلازم بين قيم «الصدق والكذب» التي تنسب إلى تلك الوحدات أو القضايا . مثلاً النظرية الخامسة في هندسة أقليدس تلزم عن الرابعة : فإذا كانت الرابعة صادقة (الشرط) فيلزم صدق الخامسة (المشروط) . وعلى عكس ذلك إذا كانت الخامسة كاذبة (المشروط) فيلزم كذب الرابعة (الشرط) . وإذن فهنا استنباط أو علاقة استنباطية بين قضيتين ليس بينهما اشتراك في المعنى اللغوي لأن كل نظرية تتحدث عن شيء مختلف وإنما فقط على أساس قيمتي الصدق والكذب فقط اللتين يمكن نسبتهما إلى كل منهما .

القضايا — أو صورها — التي تعالج في حساب القضايا الأولية هذا محدودة العدد، والعلاقات الاستنباطية بينها تتوقف على ما لها من قيمتين هما الصدق والكذب . أما رموزها التي اصطلح عليها راسل والتي أصبحت اصطلاحاً دولياً وتقليدياً في كل المؤلفات فهي كما يأتي :

(١) الحروف اللاتينية إبتداء من حرف α يدل كل واحد منها على قضية موجبة . ونحن نصطلح بديلاً عربياً لها الحروف ابتداء من حرف ل . وعلى ذلك فإن ل بمفردها تدل على قضية موجبة وتقرأ « ل صادقة » .

(٢) فإذا أدخلنا على ل علامة --- للنفي . دلت --- ل على قضية سالبة وتقرأ « ل كاذبة » .

(٣) وإذا أدخلنا بين قضيتين ل، م العلامة ٧ دلت القضية ل ٧ م على قضية منفصلة (الجمع المنطقي) .

(٤) فإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة ٥ دلت ل ٥ م على أن الأولى تتضمن الثانية بمعنى أن صدق الثانية يلزم عن صدق الأولى .

(٥) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة ٠ دلت ل ٠ م على أن القضيتين متصلتان (الضرب المنطقي) .

(٦) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة = دلت ل = م على أن القضيتين يتساويان صدقاً أو كذباً ؛

ولما كان يجب ألا نقبل في المنطق الرياضي حداً جديداً إلا إذا أمكن رده إلى حدود سبقت معرفتها فيه، وألا نقبل فيه قضية إلا إذا ارتدت بالبرهان إلى مسلمات أو قضايا سبق برهانها ، أعني لما كان هذا المنطق يجب أن يتكون في صورة نسق استنباطي بالمعنى الذي سبق أن شرحناه، وذلك لكي نطمئن إلى سلامة خطوات اشتقاق الرياضة منه، فإن راسل اختار في كتابه بالاشتراك مع هويتهدين أوليين اثنين من تلك الصور السابقة هما النفي والفصل ليعرف بالاشتقاق على أساسهما الحدود الباقية ، كما اختار خمس مسلمات (أو قوانين من المنطق) تسمح بأن نشق منها بالبرهان كل القوانين المنطقية الأخرى .

فإذا وضعنا أمامنا النفي والفصل كمحدين أوليين فسنحصل على التعريفات الآتية للعلامات المشتقة منها للتضمن والفصل والمساواة :

تعريف التضمن $ل \supset م = - (ل - م)$

تعريف الوصل $ل \cdot م = - (- (ل - م) - م)$

تعريف المساواة $L = M = (L \circ M) \circ (L \circ M)$

أما المسلمات التي قبلها للنظرية المنطقية فهي :

$$(1) \quad (L \circ M) \circ L$$

$$(2) \quad M \circ (L \circ M)$$

$$(3) \quad (L \circ M) \circ (M \circ L)$$

$$(4) \quad (L \circ (M \circ (L \circ N))) \circ (M \circ (L \circ (N \circ L)))$$

$$(5) \quad (M \circ (N \circ (L \circ M))) \circ (L \circ (M \circ (N \circ L)))$$

وعلى أساس هذه المسلمات الخمس يبرهن راسل كل القضايا المنطقية التي تستعمل الحدود السالفة الذكر فإذا تم البرهان اعتبر القضية المبرهنة قانوناً (أو كما يقول توتولوجيا) من قوانين المنطق. وقد أربت تلك القوانين المبرهنة على أكثر من خمسمائة قانون للمنطق لا يمثل القياس التقليدي منها غير قانونين اثنين من ذلك العدد الضخم، وهكذا اتسع المنطق الرياضي لعدد ضخم من قوانين الاستنباط المنطقي التي حصرها المنطق التقليدي في ضروب وأشكال القياس الضيقة، فأصبح بذلك المنطق قادراً على استيعاب الاستنباطات الرياضية المعقدة الكثيرة.

بعد أن أوجزنا أهم العناصر التي يستند إليها حساب القضايا الأولية يبقى بيان كيفية إجراء الحساب أو الاستنباط. وغرض الحساب هو إثبات أن صيغة ما من المنطق هي قانون (أي توتولوجيا) فيه بمعنى أنها صيغة دائماً صادقة مهما عوضنا من قيم محددة بدلاً عن المتغيرات فيها. وبرهان كل قضية منطقية على هذا النحو ابتداء من المسلمات أو مما سبق أن اشتق منها بالبرهان ضمان لعدم الاستناد إلى بداهة أو حدس حسي أو أية مغالطة أخرى

وهو أمر ضروري لهذه النظرية المنطقية التي تحتاج إلى الحذر الشديد من قبول عنا صر غير منطقية في الوقت الذي أخذت فيه على عاتقها اشتقاق الرياضيات منها وأثبتت أنها منطق وحسب .

وفي كل فرع من فروع الرياضيات توجد قواعد عملية لاشتقاق النظريات من المسلمات . وفي حساب القضايا الأولية الذي نحن بصددته هناك قاعدتان :

القاعدة الأولى قاعدة التعويض : وهي قاعدة تقول إنه يمكن في أية صيغة من المنطق أن يعوض عن رمز فيها مثل ل حيثما وجد بصيغة أخرى تعادله صدقاً أو كذباً. مثلاً في الصيغة $L - V - L$ (وتقرأ ل أما صادقة وأما كاذبة) يمكن التعويض عن ل بالصيغة نفسها على الوجه الآتي :

$$(L - V - L) - V - (L - V - L)$$

القاعدة الثانية قاعدة الاستنتاج وهي قاعدة مستعملة في العلوم الرمزية وإن لم يكن مصرح بها وموثداها أنك إذا علمت أن أ وكذلك أ c ب من قوانين المنطق ، فإنك تستطيع أن تستنتج ثبوت ب بمفردها كقانون أيضاً ويمكن وضع هذه القاعدة في الصورة الرمزية الآتية :

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \begin{array}{ccc} & \text{أ} & \\ \text{أ} & \text{c} & \text{ب} \\ \hline & \text{ب} & \end{array} \end{array}$$

وهذه القاعدة كما يدل مؤداها هي التي تسمح بالانتقال أو التدرج من المقدمات الى نتائجها .

إن هذا الموجز لخطوات حساب القضايا يمكن الآن فقط أن يتوج بمثال للبرهان على أن الصيغة الآتية مثلاً هي قانون أوتوتولوجيا منطقية :

$$(L \supset M) \supset ((M \supset N) \supset (L \supset N))$$

وخطوات البرهان على هذه القضية عند راسل كما يأتي :

$$\text{وفقاً لتعريف التضمن } (L \supset M) = (M - L)$$

يعوض $L -$ بدلاً من L وكذلك $M -$ بدلاً من M في المسلمة الرابعة مع التعويض عن التضمن بتعريفه نحصل على الصيغة الآتية :

$$((L -) \vee (M - N)) \supset ((M -) \vee (L - N))$$

وبتطبيق تعريف التضمن نفسه على هذه الصيغة نحصل على :

$$(L \supset M) \supset ((M \supset N) \supset (L \supset N)) \dots \dots \dots (1)$$

ثم بتعويض $L -$ بدلاً من L في المسلمة الخامسة وباستعمال التعريف بدلاً من علامة التضمن نحصل بنفس الطريقة على الصيغة الآتية :

$$(M \supset N) \supset ((L \supset M) \supset (L \supset N)) \dots \dots \dots (2)$$

ثم بتعويض $M \supset N$ بدلاً عن L ، ثم $L \supset M$ بدلاً عن M ، ثم $L \supset N$ بدلاً عن N في الصيغة (1) نحصل على :

$$((M \supset N) \supset ((L \supset M) \supset (L \supset N)))$$

$$\supset ((L \supset M) \supset ((M \supset N) \supset (L \supset N))) \dots \dots \dots (3)$$

وهي صيغة من النوع أ ° ب حيث أ هو الصيغة (٢) التي بينا أنها توتولوجيا
فالقاعدة الثانية وهي مبدأ الاستنتاج يسمح باستنتاج أن الصيغة (٢) وهي :

$$(ل ° م) ° ((م ° ن) ° (ل ° ن))$$

هي أيضاً توتولوجيا وهو المطلوب برهانه . وهكذا يبرهن راسل على
أكثر من خمسمائة قضية أو قانون منطقي في هذا الحساب .

لقد أغفلنا هنا ما كان يمكن أن يقال من تحسينات لاحقة في هذا الحساب
ومن تعليقات نقدية واكتفينا بما هو ضروري لفهمه . وليس هو الحساب
الوحيد إذ يأتي بعده حساب الدوال القضائية التي ترد إليها دوال الرياضة
وفي هذا الحساب تحلل القضية الى موضوع ومحمول . ثم يأتي بعد ذلك
حساب الفئات Calculus of Classes ثم حساب العلاقات Calculus
of relations وكلاهما يتصلان فيما بينهما كما يتصلان معاً باشتقاق
قضايا العدد ، وهنا في هذه المرحلة لا نعرف - على حد تعبير راسل - متى
انتهى المنطق ومتى بدأت الرياضة . ولقد اكتفينا بحساب القضايا الأولية
لأنه كالقاعدة التي يبنى عليها البناء المنطقي كله باعتباره نسقاً استنباطياً .

(٢٥)

لنتقل الآن الى جوهر النظرية الالوجستيقية التي ترجع الى جو تلوب
فريجه في القرن الماضي وإلى برتراند راسل في القرن العشرين وأعني بذلك
اشتقاق الرياضة (أو بالأحرى اشتقاق «الأعداد» التي ارتدت اليها الرياضة
كلها في المذهب الحسابي) من المنطق الصوري وحده .

ولما كان هذا البحث موجهاً إلى الفلاسفة دون الرياضيين فإننا سنتحاشى كل تعقيدات فنية في استعراضنا لراسل فلا نلجأ إلى الصيغ الرمزية إلا في أضيق نطاق ونكتفي بشرح مقاصد النظرية مع التعليق عليها بتمهيدات ومقارنات وتوضيحات تقربها .

نحن نعلم الآن أن راسل عرّف الرياضة الحالية بأنها « فئة تلك القضايا التي صورتها ل تتضمن م حيث ل و م قضيتان تشتملان على متغير يبقى هو هو بعينه في القضيتين وحيث لا تشتمل على ثوابت غير ثوابت المنطق » .

ونقول الآن إن مثل هذا التعريف يبرز الخصائص الآتية : الرياضة « صورية » و « قبلية » و « استنباطية » مما يؤكد كون موضوعات الرياضة ليست بالضرورة كميات تتعلق بالمكان والحركة والزمان . وما استبعاد الكم على هذا النحو إلا النتيجة الحتمية للتطور الذي وصفناه للرياضة نفسها عند أصحابها في غضون القرن الماضي من « تحسب » للرياضة استبعاد الحدس في كل صوره وخاصة المكانية ، ثم من امتداد لفكرة العدد لتشمل اللامتناهي (كانتور) وأيضاً من اكسيوماتيك للعدد أحاله الى قضايا منطقية (بيانو) وأخيراً من نقائص رياضية إحتاجت إلى حلول منطقية .

هذه التطورات المتلاحقة في اتجاه نحو المنطق بالذات هو الذي هيا تماماً الى إلتحام الرياضة بالمنطق والتوحيد بينهما في نسق موحد عند راسل . وفي نطاق هذا النسق الموحد إذا شئنا إن نعرّف كلاّ منهما على حدة فلا نجد إلا عبارة راسل الأخرى التي تقول : « إلهما لا يختلفان إلاّ كما يختلف الصبي عن الرجل . فالمنطق هو صبا الرياضة والرياضة رجولة المنطق » . ذلك لأن النسق الموحد يبدأ بحساب القضايا الأولية ثم يتدرج منه الى حساب القضايا

العملية وعندما ينتقل الى حساب الفئات وحساب العلاقات يتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى تناول الحساب العددي منتقلاً منه الى بقية فروع الرياضه كما نسقها المذهب الحسابي الذي له الفضل الأول في إمكان تسلسل الرياضه كلها إبتداء من العدد الصحيح . وإذن فنحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق وأين ابتدأت الرياضه .

إن السؤال الأول والهام الذي نبدأ منه فهم هذه النظرية هو هل التعريف الذي بدأنا منه للرياضه صادق ؟ هل يمكن تعريف الموضوعات الرياضيه كلها بواسطة ثوابت المنطق واشتقاق قضايا الرياضه من قوانين المنطق وحده ؟

هذا السؤال الهام — بفضل النتيجة التي وصل اليها المذهب الحسابي في رد الرياضه الى العدد الصحيح — يمكن ان يرَدَّ عند اللوجستيين إلى سؤال أبسط منه وهو : هل يمكن رد الحساب الى المنطق أي تعريف الأعداد بواسطة ثوابت المنطق ؟ هذا تبسط كبير للسؤال الأول يسره ووطاه المذهب الحسابي نفسه . فلنبداً إذن من الأعداد . ولكن أي أعداد ؟

إن سلسلة الأعداد الطبيعية التي يعتبرها الرياضيون أساس البناء الرياضي كله هي تلك العملية التي لا تنتهي لمتابعة أعداد صحيحة منتهية تبدأ بالصفر ثم بالواحد الخ ... إن الصفر لم يكن عدداً حتى اكتشفه الخوارزمي . والقدماء لم يعتبروا الواحد عدداً فأفلاطون يبدأ العدد من ٢ وكذلك أرسطو لأنه يوحد بين الوجود والواحد فيقول إن الواحد مساوٍ للوجود أو اسم آخر له يمكن أن يتبادل معه فهو ليس عدداً . وبعض المحدثين ينكرون أيضاً كون الصفر عدداً . ولكن ليس هناك أدنى صعوبة الآن في أن نعتبر مع اللوجستيين أن سلسلة الأعداد تبدأ بالصفر ثم تتدرج الى الواحد الخ ...

من جهة أخرى كل واحد من تلك الأعداد البادئة من الصفر يمكن أن نعتبره إما معبراً عن عدد الأشياء وأما معبراً عن ترتيب الأشياء أو درجتها في داخل سلسلة ، والاعتبار الأول هو الأهم والأولى ، لأن ترتيب الأعداد أو مكانتها داخل سلسلة ما إنما هو عملية تالية لأدراكنا الأعداد كلها على حدة ، إذ يجيء بعد ذلك ترتيبها حسب الأكبر والأصغر والمساوي . وإذن فالأعداد المسماة المرتبة (Ordinal) إنما تأتي بعد الأعداد المسماة الأساسية أو العادة (Cardinal) . ومن ثم يتحول السؤال السابق المبسط عند اللوجستيين إلى سؤال أخير محدد هو : هل يُردُّ العدد العاد إلى المنطق ؟

لنرجع الآن إلى تلك الفترة التي نشأ فيها هذا السؤال عند جوتلوب فريجه في العقدين الأخيرين من القرن الماضي .

في ذلك الوقت كان يرى بعض الرياضيين أن التساؤل عما هو العدد الذي انتهى إليه المذهب الحسابي تساؤل غير مقبول لأن العدد واضح وحتمي وربما لا سبيل إلا إلى القول بأنه هبة من الله (كرونكر) .

رياضيون آخرون قالوا إن الأعداد مجرد رموز أو علامات (Signs) ، وهي إما علامات لإجراء عمليات حسابية فتسجل الأعداد نتائج العمليات (هاينكل Haenkel) وإما علامات لا معنى لها إطلاقاً ولا تزيد على مجرد كونها علامات وحسب (الاسميون) .

آخرون قالوا إنها موضوعات سيكولوجية أي معبرة عن عملية تجريده سيكولوجي من مواقف تجريبية بحتة فتكون الأعداد منزعة مباشرة من تجاربنا . أما جوتلوب فريجه وهو أول اللوجستيين فيقول إنها موضوعات منطقية صرفة .

فيما يختص بالنظرة الأولى القائلة بأن الأعداد واضحة الى حد أنه لا يجب إثارة سؤال عن طبيعتها فهي نظرة يرفضها الواقع التاريخي القريب للرياضة حيث أن الرياضيين رأوا ضرورة متابعة تحليل فكرة العدد (عند الأكسيوماتيين مثلاً) الى مسلمات تنتجها .

أما فيما يختص بالاسمين Nominalistes الذي اعتبروا الأعداد مجرد علامات أو ترقيمات ، نقول إنهم بذلك يتكلمون عن أشياء لها خصائص هي قطعاً غير خصائص الأعداد . فالعلامات المبصرة من حيث هي كذلك هي من عالم الأشياء الطبيعية والكيميائية ، فهي ترسم على أنحاء مختلفة باختلاف اللغات ، وتكتب وتمحى وترفع وتوضع وتجمع وتفرق الى آخر ما هنالك خضوع لقوانين الطبيعة والكيمياء مما يخلو قطعاً من الخصائص المميزة للأعداد ذاتها: كخاصية كون العدد دائماً هو هو رغم اختلاف علاماته ، وكخاصية كونه في ذاته علاقة ثابتة بالنسبة لما قبله ولما بعده بينما العلامة لا تتضمن تلك العلاقة ، وكخاصية ثبات هويته عند دخوله على أنحاء لا تنتهي في التركيبات العددية . وإذن فرغم أن اختيار علامات الأعداد هام في الرياضة إلا أنه يجب ألا نخلط بين العدد وهو معنى وبين كتابته أو علامته المادية .

كذلك يجب ألا نخلط بين ذلك المعنى الذي ميزناه وبين الأفكار السيكلوجية التي تثار في ذهن الفرد عند مشاهدته للأشياء المتجمعة في فئات أو عند رؤيته بالعين العلامات العددية المكتوبة . إن تلك الأفكار السيكلوجية حالات ذاتية وتختلف من فرد إلى آخر ومن لحظة إلى أخرى ، ومن ثم فليست الأعداد ظواهر نفسية وكيفيات سيكلوجية نظراً لما فيها من دقة وموضوعية .

وإذن فلم يبق إلا أن ننسب الأعداد الى نوع رابع من الأمور غير ما

تقدم ذكره أعني الى « الصور المنطقية » ، وهذا بالضبط هو ما أبرزه في آن واحد تصور العدد عند جورج كانتور ، وتعريفه عند فريجه ثم عند راسل ، إذ يكاد يتفق الثلاثة على تعريف واحد للعدد .

إن فريجه المنطقي الذي عاصر كانتور الرياضي ولم يطلع عليه كان على علم بتميز تقليدي في المنطق بين المفاهيم أو المقصودات الأوائل وبين المفاهيم أو المقصودات الثواني : مثلاً عندما أتصور انساناً أو مثلثاً أو حركة فهذه التصورات مفاهيم أوائل أي معبرة أو دالة على تلك الأشياء التي يتصورها الفهم بداءة . ولكن إذا قلت عن تلك المفاهيم انها إجناس أو أنواع أو كليات أو جزئيات أو تصورات أوقضايا فهذه أوصاف لاحقة للمقصودات الأوائل ومن درجة ثانية بالنسبة إلى الأشياء وليست معبرة أو دالة عليها . هذه هي المقصودات الثواني التي هي موضوع المنطق بالذات .

وكذلك الشأن في العدد عند فريجه : فالأشياء متفرقة ومجموعة لها معانيها الأوائل المباشرة ، فمثلاً هذا إنسان وتلك شجرة الخ ... ولكنها في أنفرادها وفي تجمعها لها صفات أخرى غير مفاهيمها الأوائل وتلزم عن نظرنا في صفة ما مشتركة من صفات مفاهيمها . تلك مفاهيم أخرى غير مفاهيمها الأوائل نلتفت إليها بعقلنا ونصل إليها بعملية تجريد عقلي وتلك هي أعدادها . فالأعداد ليست تصورات مباشرة أو أوائل وإنما هي تصورات من درجة ثانية عن تصورات مباشرة ، هي إلتفات أو تجريد لصفات مشتركة بين تصورات أوائل ، إذ يجب أن تكون هناك أولاً تصورات الأشياء المتفرقة والمجموعة في فئات لكي تكون هناك بعد ذلك تصورات عديدة للفئات .

إنه إبتداء من وجهة نظر كهذه توصل أيضاً جورج كانتور في نظريته

في « المجاميع » الى فهمه للعدد كأسس أو قوى (Powers, Puissance)
فحسب بالنسبة لتصورات الأشياء ، أعني كتصورات كلية تكونت بالتجريد
العقلي لصفة ما عندما تجتمع الأشياء في فئات أو مجموعات . وبالطبع مجموعات
كثيرة مختلفة يمكن أن تؤدي بمثل هذا التجريد الى نفس التصور الكلي أي
نفس العدد عندما « تتساوى » المجموعات فيما بينها أي عندما نلتفت الى
صفة مشتركة ومتماثلة كالمساواة القائمة بين مختلف تصورات الفئات المعروضة
علينا . هذا هو تصور جورج كانتور للعدد حيث نلاحظ أن تصوره للعدد
كأسس أو قوى هو عين تصور جوتلوب فريجه للعدد كمقصود ثان أي كتصور
مجرد عن تصور أول .

بهذه المناسبة وقبل أن نتقل الى راسل نتوقف قليلاً عندما يسمى التعريف
بالتجريد Definition by Abstraction الذي يكمن وراء تلك الآراء ويؤدي
الى هذا التصور للعدد كمقصود ثان أو كأسس وقوى . فهناك من أنواع
التعريف الممارسة في العلم والرياضة ما يسمى بهذا الاسم ، وبمقتضاه نعرف
الأشياء مهما اختلفت وتضاربت بواسطة صفة مشتركة بينها نلتفت إليها
ونعزلها عزلاً عقلياً لاغراض العلم : فقد يختلف جسمان في حجمهما
وشكلهما ومادتهما ولكنهما « يتساويان » وزناً فبعزل صفة المساواة أو بتجريدها
نقول إننا نعرفهما بالتجريد . مثال آخر للتعريف بالتجريد ما قبله أفليدس
في مسلمته الخامسة ؛ فقولاك الخط ا يوازي الخط ب إنما معناه إننا حددنا
أو عرفنا الخطين بأن انتزعنا معنى جديداً مشتركاً هو أن أتجاه أ يساوي إتجاه
ب . وبذلك تكون مسلمة أفليدس تعريفاً بالتجريد .

إن التعريف بالتجريد متصل بتحليل « العلاقة » Relation وبتعريف
العدد عند راسل . فهو يسمى « علاقة متعدية » Transitive Relation

تلك العلاقة التي إذا فرضنا قيامها بين أ ، ب ، ج فإنها تقوم كذلك بين أ ، ح ومثل هذه العلاقة أعم من علاقة « المساواة » Equality وتشملها . مثلاً علاقات أب أو ابن أو « اكبر من » كلها علاقات متعدية ولكنها ليست كالمساواة قابلة للإنعكاس أو للرجوع على الأعقاب . مثلاً إذا كان أ أباً لب فإن ب ابن لأ وليس أباً له . بينما المساواة قابلة للعودة أو الانعكاس فهي علاقة سيمترية أو متسقة Symetrical كما يصطلح راسل . إذن المساواة هي في آن واحد علاقة متعدية وسيمترية . إن العلاقة التي تجمع في آن واحد التعدية والسيمترية يسميها راسل التماثل أو التشابه Similitude . ولهذا اللفظ الذي يظهر في حساب العلاقات أهمية خاصة في تعريف راسل للعدد بما لا يخرج جملة عن تصور فريجه وكانطور . ونحن نثبت فيما يلي تفكير راسل برموزه بين قوسين كبيرين لأنها مسألة فنية بحثة يمكن للقارئ أغفلها .

[إذا فهمنا هذه الإشارات السريعة ثم وضعنا نصب أعيننا الرموز الآتية التي يستعملها راسل في تعريفه للعدد وهي :

NC الاعداد العادة

Nc العدد العاد

CI فئة

Sim تماثل — مشابهة

D هو هو بعينه

فإننا نقول إن راسل الذي تأثر بكانطور يرى مثلاً أن العدد « ثلاثة » هو فئة CI ولكنه ليس فئة لأشياء ، أي ليس منزعاً مباشرة من الأشياء بحيث يكون المقصود الأول منها ، وإنما هو فئة لفئات كثيرة متشابهة Sim فيما بينها بالثلاثية . بعبارة أخرى نعرف العدد ثلاثة بالتجريد لفئة مشتركة أو

متماثلة بين فئات كثيرة وهذه الفئة المتماثلة هي علاقة متعددة سيمترية . إذن العدد ثلاثة هو فئة كل الفئات المماثلة لـ a مثل الفئة B فيكتب بالرمز

$$Nc \text{ 'a' } = B \text{ (} \hat{B} \text{ sma)}$$

يجيء من هذا التعريف الآتي لأي عدد منفرد (ونحن نذكر رقم القضية في كتابه بالاشتراك مع هويتهد) .

$$* 100. 01 \quad Nc = \overrightarrow{sm} \quad Df.$$

الذي يقول ان أي عدد عاد هو بالتعريف فئة الفئات المتماثلة

(Cardinal number is a class of Classes Similar to one another)

ثم يجيء التعريف الآتي للعدد العاد جملة

$$* 100. 02 \quad NC = D' Nc \quad Df.$$

وفئة العدد العاد جملة هي فئة لجميع الأعداد العادة المنفردة ولذلك نقرأ التعريف كما يأتي :

فئة الأعداد العادة NC إنما هي فئة لفئات (D) كل الفئات المتماثلة Nc

(The Class of Cardinal numbers is the Class of the Classes which are Similar to one another) .

إذن هناك أولاً فئات الأشياء ، ثم هناك فئات أو أعداد منفردة لتلك الفئات الأولى ، ثم أخيراً هناك فئة عامة لكل تلك الأعداد وهي سلسلة العدد العاد .

ثم ينتقل راسل بعد ذلك إلى تعريف الصفر فالواحد ، ثم الجمع والضرب فتتكون بذلك سلسلة الأعداد العادة . وفيما يختص بالعددين المذكورين يعطي راسل التعريفين الآتيين بالرموز ونحن نترجمها كما يأتي :

الصفر هو الفئة التي عضوها الوحيد هو فئة الحلو (Nul class) .

الواحد هو فئة كل الفئات ذات العضو الواحد .

ثم يبرهن راسل على عدد كبير من قضايا الحساب على أساس عمليتي الجمع والضرب المستمدتين من مقابلتهما في الحساب المنطقي (الوصل والفصل) ثم يتدرج بعد ذلك إلى استنباط كل فروع الرياضة وقضاياها كما وردت سلسلة في المذهب الحسابي الذي له الفضل في تيسير مهمة اللوجستيين[.

والآن دون أن نترسل إلى أبعد من هذا في تفصي موقف راسل في اشتقاق الرياضة الذي طابعه الأول الدقة الفنية مما يتجاوز حدود عرضنا هذا نود أن نتقل فوراً إلى مناقشة قيمة الموقف اللوجستيقي .

وأول كل شيء ننبه إلى أن التعريفات المتابعة في هذا المذهب لها أهمية كبرى تفوق أهمية اشتقاق النظريات كما يشهد بذلك تعريف العدد أو أي ثابت منطقي آخر مما ذكرنا نموذجاً له . ومن ثم يجب أن نلاحظ ما يأتي على التعريفات .

أنها تبدو في بادئ الأمر ذات قيمة فنية بحتة لأن وظيفتها إنما هي إدخال رمز مختصر جديد هو «الحد» الذي يراد تعريفه بدلاً من مجموعة مطولة من الرموز التي سبقت معرفتها في النسق نفسه وهي التعريف .

ولكن في حقيقة الأمر إذا نظرنا إلى التعريفات من جهة مضموناتها أو

معانيها فإنها تصبح ذات أهمية أبعد خطراً سواء من حيث توكيدها لأهم المعاني أو الأفكار التي يدور حولها النظر في النسق المنطقي الرياضي الموحد أم من حيث تحليل تلك المعاني أو الأفكار التي يحملها الرمز الجديد تحليلاً دقيقاً محدداً لا نحصل عليه في أي قاموس أو علم آخر وذلك كما تشهد به الرموز المطولة التي تعرف الرمز الجديد وتضع تحليلاً لمعناه .

وإذن فلسفياً التعريفات هنا ذات أهمية كبرى في حين أن استنباط القضايا أو النظريات الرياضية هو أمر أقل أهمية فلسفياً بل وفنياً إذ قد ذل ذلك الأمر وعبد طريقه من قبل المذهب الحسابي الذي سلسل قضايا الرياضة تسلسلاً بديعاً ونهائياً .

وحتى إذا كان هناك خطأ ما في استنباط قضية رياضية في نسق راسل فإننا نستطيع أن نطمئن إلى صدق القضية ذاتها استناداً إلى المذهب الحسابي . على كل حال استنباط القضايا أقل أهمية من تعريفات النسق الجديدة التي تعبر بلغة المنطق عن أمور لم تكن في المذهب الحسابي منطقية أو ضرورية .

هذا ثم إن الاختيار الحر من بين الرموز الكثيرة الواردة في النسق لطائفة محددة محصورة نعرف بها رمزاً جديداً (الحد الذي يطلب تعريفه) هو أمر أكثر من مجرد عمل قاموسي إذ هو أعسر عمل في تكوين النسق الاستنباطي من حيث أن ذلك الاختيار إنما يتطلب تبصراً نافذاً بموضوعات النسق وفهماً دقيقاً لأهدافه ولأحسن الطرق المحققة لها .

وهنا أيضاً نلاحظ أن كل تعريف جديد من التعريفات المتتابعة في داخل النسق إنما هو أمر يحدد بالدقة المرحلة التي وصل إليها النسق في طريقه الطويل نحو هدفه ، كما أن خير وصف لذلك الطريق الطويل في أية مرحلة من مراحلها إنما هو معرفة التعريف الذي يميز تلك المرحلة بحيث نحسم في كل مسألة

تثار إذا كان يمكن أن تجاب إيجاباً أم سلباً في حدود مرحلة معينة من التعريفات .

كل هذا الكلام في إبراز أهمية التعريفات في النسق الموحد هو لتركير الانتباه في أهمية تعريف العدد الذي جاء به راسل في النسق اللوجستيقي والذي سبق ذكره . فالمسألة الآن هي هل هذا التعريف للعدد الذي بواسطته انتقل النسق الموحد من المنطق الى سائر أجزاء الرياضه يقبل التبرير فيصبح منطقياً أو فلسفياً غير قابل للطعن أو الرفض وأنه يطابق الموضوعات المعروفة في الرياضه باسمه وأنه لا يطابق إلا هذه الموضوعات وحدها ؟

فيما يختص بالتعريف الأخير الخاص بالعدد العاد في عموم (المرقوم برقم 100 . 02 من العسير أن يتردد أحد في قبوله لأنه يؤكد بكل بساطة أن فئة العدد هي فئة جميع فئات الأعداد العادة .

أما فيما يختص بالتعريف الأول (المرقوم برقم 100 . 01 فقد وجهت اليه إعتراضات نناقشها الآن لتبين مدى إمكان تبرير التعريف .

فأبدأ أولاً بالقول بأن الرياضي هاوسدورف (Hausdorff) قال إن تصور فئة لكل الفئات الخ ... هو تصور غير مقبول لأنه يقود إلى تناقض منطقي معروف هو أن مثل هذا التصور يشمل نفسه أو مدلوله كجزء من نفسه إذ أن « فئة » لكل الفئات هي نفسها عدد أيضاً . لقد رأينا أن لمثل هذا الاعتراض نظيراً عند راسل على نظرية جورج كانتور ولذلك نتركه هنا لمن ينظر في حل نقائص تلك النظرية الرياضية فهناك نجد المحاولات المختلفة لتخطي تلك العقبة .

ثانياً يعترض الرياضي مولدرب Molderup في مقال له في الحولية الرياضية Math . Annal بأن ذلك التعريف متناقض في ذاته من حيث

أنه يجعل العدد ١ هوفئة كل الأشياء في الوجود ، بمعنى أنه يندرج تحته كل شيء من حيث أنه مفرد . ولكن لا أرى في ذلك أي تناقض فإن أرسطو كما رأينا جعل الواحد مساوياً للموجود ، ويتبادلان (أي الواحد والموجود) بذلك الدلالة على الشيء الموجود ولم يطعن أحد بتناقض أرسطو .

ثالثاً يعترض الرياضي Welstein في دائرة معارف الرياضة (١٩٠٩) بأن عدد فئة ما لا يمكن أن يعتبر فئة كل الفئات المماثلة لفئة ما من حيث أن هذه الفئة الأخيرة غير معروفة لنا . وهنا نلاحظ أنه ليس ضرورياً أن نعرف كل أعضاء فئة ما لكي نصل الى تحديد أو تعريف تلك الفئة . وكل ما نحتاج إليه هو أن تكون لدينا وسيلة أو طريقة لنقطع فيما إذا كان موضوع ما هو عضو أم لا لتلك الفئة . مثلاً فئة الشكل الكثير الأضلاع هي منطقياً فئة يمكن تبريرها تماماً من حيث أن تعريف الشكل الكثير الأضلاع بمدنا بوسيلة أو طريقة لنبت في أية لحظة فيما إذا كان موضوع ما هو كثير أضلاع أم ليس كذلك . إذن فالاعتراض المذكور يتبدد لأن تعريف العدد يعطينا طريقة للنبت فيما إذا كان أمامنا عدد دون أن يعين عدداً بالذات من الأعداد الفردية . إذ أن هذه تأتي تعريفاتها بعد ذلك كما وضحنا ذلك فيما يختص بالصفر والواحد .

هذه إعتراضات وجدناها في طريقنا على تعريف راسل ونتبين من مناقشتها ما يبرر تماماً تعريفه للعدد ، كما وجدنا أيضاً ما يبرر اتجاهه هذا في تعريف العدد من قبله عند كانتور وعند فريجه .

واقصدنا أبراز الأهمية الفلسفية لتعريف العدد بالذات في النسق الالوجستيقي وكذلك التعريفات الأخرى ، لأنه إذا كانت هناك أهمية خاصة نعلقها على ما أنجزه هذا النسق من تقدم فإن هذه الأهمية لا تستمد من اشتقاق

النظريات الرياضية بالبرهان فهذا الاشتقاق كما قلنا كان قد يسره وعبد المذهب الحسابي من قبل ، وكل ما أضافه المذهب اللوجستي هنا هو تعبيره بثوابت المنطق أو صورته عما كان معبراً عنه فقط برموز الرياضة ، في حين قد بقي تسلسل قضايا ونظريات الرياضة بعضها من بعض على النحو الذي تركه عنده المذهب الحسابي . لكن لم يكن يتيسر هذا التعبير المنطقي للرياضة إذا لم يوفق المنطق إلى تعريفاته بالحيلة المتلاحقة التي بها يتمثل المنطق كل تصورات الرياضة ويذيبها فيه وعلى رأسها تعريف العدد الذي وقفنا عنده لأهميته لأنه القنطرة التي يعبرها المنطق إلى سائر أجزاء الرياضة . ومن ثم نرى أن التعريفات اللوجستية وهي من عمل اللوجستيقا لا من المذهب الحسابي إنما هي الأمر الهام « علمياً » في هذه الفلسفة العلمية التي تبطن وراءها فلسفة كاملة هي أن الرياضيات من طبيعة منطقية وحسب وليس لها مادة مستقلة عن ثوابت المنطق أو صورته .

- (٢٦) -

نريد أن نلقي الآن نظرة سريعة على المذهب الأكسيوماتيكي الذي هو رد فعل مباشر على المذهب اللوجستي من إمام الرياضة المعاصرة ديفد هيلبرت الذي كان استاذاً بجامعة برلين حتى قبيل اندلاع الحرب العالمية الثانية وهو لا يرى أن الرياضة فرع من المنطق ومشتقة منه كما انتهى إليه اللوجستيقون وإنما يرى أن المنطق والرياضة نبعا كلاهما متوازيين عن نبع واحد أسبق منهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (Axiomatic Method) أو كما يقال أحياناً نبعا عن صورية خالصة (Pure Formalism) هي الأساس المشترك والبعيد لهما معاً . وليان ذلك نقول إنه لكي تستقيم الرياضة

والمنطق معاً كعلمين استنباطيين (Deductive Sciences) وثيقين يجب الذهاب إلى ما هو أبعد من حدودهما ومسلماتها الأولية التي وصلت إليها الأبحاث السابقة عند بيانو وفريجه وراسل ومن مهد لهم في تحليل الرياضيات والمنطق إلى حدودهما ومسلماتها الأولية من أمثال مورترز باش وديدكند وغيرهم .

وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية في المنطق والرياضة كلاهما إنما ينتهي إلى ، أو على الأصح يبدأ من قبول حدود ومسلمات أولية أخرى عارية من كل معنى سواء في الرياضيات أم في المنطق لأنها مجرد رموز نضعها وضعاً ومن ثم فهي صورية بحتة لا تتضمن معنى ما . وتلك الحدود والمسلمات التي لا هي إلى الرياضيات ولا هي إلى المنطق هي التي تسمى « الأكسيوماتيك » التي تشتق منه بالتوازي وفي آن واحد الرياضيات والمنطق منفصلين .

ولوضع الأكسيوماتيك على طريقة هلبرت شروط هامة مشهورة أجملنا ذكرها فيما سبق أن قلناه عن شروط تأسيس المسلمات في الهندسة وهي شروط الاستقلال والأشباع وعدم التناقض التي لا تزال قيد الدراسة ولم تصل فيها الأبحاث بعد إلى قول فصل .

ولما كان الأكسيوماتيك وما يثيره من أبحاث في شروط وضعه من الأمور التي لا تدرس في كل من المنطق والرياضة ولا يدخل في موضوع أي منهما فقد اصطلح هلبرت على تسمية كل تلك الأبحاث الأكسيوماتيكية بما وراء الرياضيات (Metamathematics) تارة وبما وراء المنطق (Metalogic) تارة أخرى ، فتكون بذلك علم أو بحث جديد يجتذب الباحثين ويمهد للدراسات المنطقية والرياضية معاً .

ولا بد أن نلاحظ أن هذه النظرية الأكسيوماتيكية من حيث هي « صورية » تتفق — أو بتعبير أصدق — تتجاوب مع حركة عامة مضاهية

لها في العلوم الطبيعية نحو تجريد أكبر وصورية متزايدة يصحبهما ليس فقط دقة في التحقق التجريبي من النظريات العلمية بل كذلك عدم معقولية متزايدة للتصورات المستعملة في العلم . فالطبيعات الحديثة لا تميل إلى تفسير العالم ولا إلى أن تصفه وإنما بدلاً عن ذلك كله تهدف إلى استعراض بنيانه فقط (Structure) باستعمال الرموز التي لا معنى لها أي لا تعقل وهي منفصلة بعضها عن بعض بقدر ما تعقل فقط عند الارتباط بعضها مع البعض في معادلات تبين استعمالها وبالتالي معانيها . إن هذا الميل المتزايد من علماء الطبيعة نحو الإهتمام بالبنيان الرمزي للعلم وما تتضمنه الاقتارات المختلفة للرموز من معانٍ، له صداه أو قل له شبيهه عند هلبرت وتلاميذه من الأكسيوماتيكيين المعاصرين الباحثين في أسس الرياضيات .

إن هذا المذهب ، مذهب الصورية البحتة هو مسألة فنية صرفة أولاً ، ثم هو بعد ذلك فلسفة أن استطعنا أن نسمي فلسفة القول المجمل بأن هناك أصلاً مشتركاً للمنطق والرياضة معاً . أما بيان ذلك الأصل المشترك فهو المسألة التي وصفناها بأنها فنية صرفة . وبرنامج هذه المسألة الفنية يبدأ بإقامة نسق رمزي من الحدود والمسلمات الأولية تشتمل على رموز للدوال الرياضية والأعداد كما تشتمل على رموز لثوابت وقوانين من المنطق .

ويبدأ النسق بحساب للقضايا يستعمل الرموز التي عرفناها عند راسل مع مسلمات للتضمن والوصل والفصل والنفي والمساواة والعدد . ولقد جاء عدد تلك المسلمات كبيراً جداً بالقياس إلى مسلمات منطق راسل التي سبق ذكرها وسبب ذلك أن مسلمات النسق الجديد إنما قصد بها شيء أكثر من مجرد إقامة المنطق وحده إذ يجب أن يحسب فيها حساب الأعداد أيضاً .

ويجب أن نلاحظ أن هذا المذهب أكثر صورية في الواقع من المذهب

اللوجستيقي لأنه يبدأ من مسلمات « اسمية » بحتة أي مجرد رموز لا تعني المنطق أو الرياضة، ولكنه مع ذلك لا يختلف كل الاختلاف عن المذهب اللوجستيقي كما أراد له صاحبه هلبرت ، إذ هو في الواقع يكمله ويزيد من دقته ، لأنه لم يفعل إلا أن أوضح أماكن الذهاب في تكوين الحدود والمسلمات الأولية إلى ما وراء المنطق، ذلك المنطق الذي وقف عنده راسل . هذا ثم إن الأكسيوماتيك كما نراه عند هلبرت وتلاميذه يحتاج إلى قدر من المنطق قبل أن تستنبط منه قوانين المنطق لأنه أحد شروط تأسيسه هو أن لا تتناقض المسلمات فيما بينها وعدم التناقض هذا من أهم قوانين المنطق . فالمنطق إذن مفروض مقدماً في كل محاولة أكسيوماتيكية من هذا النوع ولذلك يرى المنطقيون أن هذا المذهب مكمل فقط للمذهب اللوجستيقي ومعمق له .

لكن هناك أيضاً اعتراضات وجيهة على هذا المذهب يقول أحدها أن هذا المذهب بدلاً من أن يعالج مسألة عدم تناقض الرياضيات مباشرة أعني بدلاً من معالجة نقائص الرياضة الحديثة في نطاق الرياضة القائمة فعلاً إنجها إلى اختيار مسلمات بعيدة تنتج الرياضيات والمنطق سوياً ، بينما هي لا معنى لها في ذاتها لأنها مجرد رموز خاضعة لقوانين اقتراناتها التي تحددها المسلمات ، كما أن مجرد اختيارها دون غيرها تظل مسألة غيبية وربما ترجع إلى حدس رياضي بعيد أمل ذلك الاختيار دون غيره في الوقت الذي تريد فيه الصورية البحتة لكي تبرر اسمها أن تستبعد احتمال دخول أي حدس في الفكر الرياضي والقضاء على مجرد إمكان ظهوره .

بقي التيار الثالث المعاصر في مشكلة أسس الرياضة وهو المذهب الحدسي (Intuitionism) أو المذهب الحدسي الجديد (Neo - Intuitionism) الذي يعتنقه رياضيون من أمثال بروور Brouwer وفايل Weyl وهيتنج Hoyting في ألمانيا وجيل أقدم منهم من أمثال بوانكاريه Poincaré ولويج Lobesge وبير Baire في فرنسا ، وغير هؤلاء ممن اختلفوا على معارضة المذهب اللوجستي وحده (مثل أولئك الرياضيين الفرنسيين الذين ذكرتهم) أو على معارضة المذهبين اللوجستي والأكسيوماتيكي معاً (مثل هؤلاء الرياضيين الألمان الذين سبق ذكرهم) .

وهو مذهب لا يمكن إغفاله رغم أنه رياضي بحت ، لأنه مذهب فريق من أجلاء الرياضيين المعاصرين الذين يعنيهم الأمر في كل بحث يدور حول عامهم الرياضي العريق ، ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هي الأصول التي كانت (من قبل حركة النقد الباطني التي طردت كل حدس من الرياضة) من تقاليد الرياضة في عصور نموها عبر القرون .

وهم في جملتهم يعنون « بالحدس » لا البداهة الديكارتية وإنما المعنى الكانطي للكلمة أي تلك التجربة الحسية أو الذهنية التي يبيحها المكان والزمان وهي التجربة التي تقابلها وتناظرها التجربة العملية في العلوم الطبيعية . فهم إذن رياضيون يقولون إن الرياضة لها « مادة » معينة وإذن فهي ليست صورية بحيث تشتق من المنطق الصوري وإن تلك المادة إنما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس الرياضي . ذلك الحدس التجريبي القبلي الذي هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضي وإلى تأسيس الرياضة كعلم أصيل مستقل عن

المنطق والأكسيوماتيك معاً . وما المنطق والأكسيوماتيك في نظر هؤلاء إلا الوسيلة العلمية اللاحقة « لاستعراض » أو « شرح » أو « بسط » تلك الكشف والتجارب الرياضية الأصيلة في صورة واضحة يفهمها الآخرون الذين لم يكتشفوها . فهناك إذن فرق واضح بين مناهج الرياضة وبين عرض الرياضة وتقديمها إلى الآخرين . فالمناهج تجريبية أي حدسية أما العرض اللاحق للتجربة أي للحدس فهو منطقي أو أكسيوماتيكي .

هذا هو المذهب الحدسي كما يستخلص من فلسفة قدماء الحدسيين من أمثال كانط وبوانكاريه وغيرهما مما يطلق على مذاهبهم « المذهب الحدسي » وحسب .

أما المذهب الحدسي الجديد فهو مذهب المعاصرين ، بروور وفايل وهيتنج ، الذين تعمقوا فكرة الحدس الرياضي بحيث أخرجوا من الرياضة كل ما لا ينبئ عنه ذلك الحدس ، كما تجنبوا في علمهم كل النقائض (Paradoxes) والأخطاء التي وقعت فيها الرياضة الحديثة بسبب الحدس نفسه . فأعطوا كلمة الحدس معنى خاصاً وضيقاً يميز مذاهبهم « الحدسي الجديد » عن المذهب الحدسي عامة . ومذاهبهم فيه قلق مبهم ويختلف من مؤلف إلى آخر فلا توجد له وحدة بينهم إلا في القول الغامض بأن « الرياضة متحدة بالجزء المضبوط للفكر » (Mathematics is identical with the exact part of our thought) . وهم يقصدون بهذا أن الفكر إذا كان أحياناً « مضبوطاً » بالغ الدقة فهذا هو موضوع الرياضة وموضع الحدس الرياضي . فهم إذن يواجهون الرياضة من زاوية سيكولوجية ويقربون من موقف كانط والحدسيين جملة من جهة اختلاط الرياضة بمادة فكرية ما . وإذا كانت الرياضة عندهم هي الجزء المضبوط من الفكر فهي لا تفتقر إلى أساس لها أي

علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق كما يريد اللوجستيقيون . وهؤلاء اللوجستيقيون واقعون في خطأ الدور حين يدعون تطبيق نظريات المنطق كوسيلة للبرهان في الرياضه ذلك لأن تلك النظريات كما يتضح من المنطق في صورته اللوجستيقية أو الأكسيوماتيكية هي نفسها محتاجة في تكوينها إلى تكوين الرياضه اولاً ، لأنها تحتاج إلى فكرة الفئة (Class) وفكرة الترتيب (Order) وما ينشأ عنها من تسلسل الأعداد وغير ذلك من الأفكار الرياضيه ، وإذن إذا كانت الرياضه بهذا المعنى أولى وغير مقيدة بأي علم آخر حتى ولو كان المنطق نفسه فلا يبقى من منبع لها غير « الحدس » الذي يقدم لنا التصورات الرياضيه والاستنباطات الرياضيه كأمور أصيلة مباشرة واضحة في ذاتها . وهذا الحدس إن هو إلا المقدرة على معالجة بعض تصوراتنا واستنباطاتنا التي تحدث في تفكيرنا العادي معالجة منفصلة (Separato) ومضبوطة (Exact) ودقيقة .

تلك الكلمات التي وصفنا بها المذهب الحدسي الجديد مقتطفة من هايتنج (A. Heyting) في بحث له في مجلة Erkenntnis سنة ١٩٣٢ بعنوان الأسس الحدسية للرياضه) الذي يضيف أيضاً كخاصية من خواص المذهب الحدسي الجديد أن الأمور التي هي موضوع الرياضه هي أمور مستقلة عن التجربة الخارجية (الحسية) كما أنها ليست صورية بالمره ، ولكنها مع ذلك هي أمور « موضوعية لا توجد مع ذلك إلا في الفكر » .

بعد هذه اللمحة في طبيعة هذا المذهب نلاحظ أن تطبيقه أدى بمعتنقيه إلى نتائج مؤسفة للغاية في نظر بعض الرياضيين والفلاسفة ووخيمة العاقبة على علم كالرياضه ذي تاريخ حافل مجيد : فقد بدا هذا العلم منذ مجهودات المذهب الحسابي علماً استكمل تنسيقه ووحده . ولكن أنصار هذا المذهب

الحُدسي الحديد قطعوا أوصاله بعد تلك الوحدة التي أقامها المذهب الحسابي ، وأخرجوا الكثير من أجزائه الهامة باعتبار أنها ليست من الرياضة في شيء ولا ينبغي عنها الحُدس ، ومثال ذلك الأعداد الدائرة والأعداد اللامتناهية وبعض الدوال التحليلية حتى نظرية المجاميع (كانتور) التي هي أطرف وأعق اكتشافات الرياضة في عصورها الأخيرة لما جاءت به من حلول عجيبة في عمومها لمشاكل اللامتناهي التي اصطدم بها الفكر البشري منذ فجره . فتبقى بعد ذلك أجزاء متناثرة لا يمكن جمعها بعضها إلى بعض في نسق موحد لتسمي الرياضة . ومن جهة أخرى اضطر أنصار هذا المذهب الحُدسي الجديد إلى أن يلجأوا إلى المنطق الصوري الحديد في كل أبحاثهم بحيث يبدو نقدهم للصلة بين الرياضة والمنطق في مأزق لا مخرج منه لأنهم يرفضون المنطق كأساس من جهة ثم هم يلجؤون إليه من جهة أخرى لإقامة نظريتهم . ولقد امتشق هابرت مرة أخرى قلمه ليفند طرائقهم ونتائجهم ويردهم إلى الطريقة الأكسيوماتيكية عنده .

وهكذا نختتم مع بوانكاريه بأنه لا سبيل إلى التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة لأنه لا يمكن التوفيق بين منطقيين وتجريبيين ، بين ذوي العقلية الكانتورية وذوي العقلية غير الكانتورية ، بين من ساهم ولیم جيمس ذوي العقول الرقيقة وذوي العقول الخشنة . والله أعلم ، والحمد لله رب العالمين .

مراجع مختارة

- Aristote : Analytique seconde
- Beth, E.W. : Les fondements de Mathematique, Louvain 1950.
- Black, M. : The Nature of Mathematics, New York 1952.
- Brouwer, L.E.J. : Intuitionism and formalism, Bulletin of Am. Math. Soc. Vol. xx, 1913.
- Brunschvicg, L. : Les étapes de la philos. Mathem. Paris.
- Carnap, R. : Foundations of logic and Mathematics, International Encyclopedia of Unified Science, 1/9 Chicago 1939.
- Chivistek, L. : New foundations of Formal Mathematics, Journal of Symb. logic, 1938.
- Colerus, B. : De Phythagore à Hilbert, Paris 1936
- Couturat L. : 1) l'infini mathematique, Paris 1896
2) La logique de Loibniz d'après des documents inédits, Paris 1901
- Darbon : La philosophie Mathematique de B. Russell, Paris (Alcan).
- Gonseth, F. : Les Fondements des Mathematiques, Paris 1926.
- Heyting, A. : Intuitionism, An Introduction, Amsterdam, 1956.
- Jourdain, Ph. : Foundation of Math., Journal of Math. 1930.
- Kleene, S.C. : 1) A theory of positive integers in formal logic, Am. Jour. of Math, 1935.

- 2) Introduction to Mathematics, New York 1952.
- Nicod, J. : A reduction in the Number of the primitive Propositions of logic, Proc. Cam. Philos. Soc., Vol. XIX, pp. 32-41
- Peano, G. : Formulaire de Mathematique, Turin 1898-1908.
- Poincaré, H. : Science et Methode, Paris 1908.
- Ramsey, F.P. : The foundation of Mathematics, Kegan Paul 1981.
- Russell, B. : 1) Principles of Mathematics, Cambridge 1903.
Introduction to Math. Philosophy, London, 1919.
- Russell & Whitehead : Principia Mathematica, 3 vols. Cambridge 1910-1913.
- Tannery, J. : De la methode dans les sciences; ch. sur les math.
- Tarski, A. : Introduction to Mathematical logic, 1988.

فهرس تحليلي للموضوعات والمصطلحات والاعلام باللغة العربية

(أ)

ابن سينا : تعريف الرياضة ٢٥ ، في أسس الرياضة ٤٥ / ٤٦ ،
أبجدية عامة : ١٢٧ .

اتصال (انظر الاتصال الهندسي)

الاتصال الهندسي (انظر دالة ، حدس) : تعريفه ٩١ ، صلته بالدالة ٩١ / ٩٢ ،
عدم الثقة فيه ٩٢ / ٩٣ . صلته بالهندسة التحليلية ٩٣ ، إحلال العدد

محل الاتصال ٩٦ / ٩٧ ، ١٠٦ / ١١٠ ، والعدد الاصم ١٠٧

احتواء : ٧٠ ، ١٢٨

إحداثيان : ٩٢

أحمس : ٣٠

إخوان الصفاء : ٣٤

أرستو : ١٧ ، ٢٤ ، ٣٧ ، ٣٩ ، تحليله لاصول العلم البرهاني أو علم الرياضة

٤٣ / ٤٥ . ٤٦ ، التصور المشترك بينه وبين أقليدس عن طبيعة النسق

الاستنباطي ٤٩ . رموزه المنطقية ٨٤ ، نقده لزينون ١١٢ . ١٢٨ ،

١٢٩ . ١٤٤

استدارة : ٦٠
استقراء رياضي : ١٢١
استقراء بالتكرار : ١٢١
استقلال : بالنسبة للمسلمة الاقليدية الخامسة ٥٨ ، شرط استقلال المسلمات في
الاكسيوماتيك ٧٨/٧٩

استقلال مرتب : ٧٩
استنباط : في الرياضة عند باش ٦٨ ، الابتعاد عن الاشكال الهندسية ٦٩ .
استنباطي (علم ، انظر اكسيوماتيك ، برهاني ، نسق) : ٤٣ ، ٦٨/٦٩ ،
١٥٥

استنتاج (قاعدة) : ١٤٠
أسس (انظر أصول ، اكسيوماتيك ، اوضاع مبادئ ، مسلمات ، مقدمات ،
أسس الرياضة ، فلسفة الرياضة) : ٧ ، ٤٤ .
أسس الرياضة : ما هي ١٤ ، ٥٤ ، عند ارسطو ٥٣/٤٥ ، عند أفليدس
٤٦/٤٨ ، وفكرتا المكان والزمان ٦٤/٦٦ ، ٩٠ ، في الهندسة عند مورتز
باش ٦٧/٧٠ ، الاعداد الصحيحة كأساس للتحليل في المذهب الحسابي
٩٩ ، ١١٧ ، ١١٨ ، اكسيوماتيك الاعداد ١٢٠/١٢١ : المنطق
كأساس ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٣٥ ، ١٤٨/١٥١ ، عند الاكسيوماتيكيين
١٥٥ ، ١٥٨ ، عند الحدسيين ١٥٩/١٦١ .

اسكندر الأكبر : ٣٩
اسميون : في طبيعة العدد ١٤٥ ، ١٤٦
اشباع : شرط في تأسيس المسلمات ٨٠
اشتراك (قانون ، انظر اقتران) : في الجبر ٨٥ ، ١٠٠
أضم (عدد ، انظر عدد) : عند الفيثاغوريين ٣٤ ، دهم له الى العدد المنطوق
٣٥ ، ١٠٥/١٠٦ ، رد المحدثين له الى العدد الصحيح ١٠٧/١٠٩
أصل (انظر أصول)

أصول (أو أصول موضوعية ، انظر أسس ، اوضاع ، علوم متعارفة) :
تعريفها ٤٤ ، عند ابن سينا ٤٥ ، عند أقليدس ٤٧ ، عدم تمييزها عن
المسلمات ٤٨ .

افلاطون : نظرتة المثالية في أصل الرياضة ٢٤ ، ٣٧ ، ٤٨ ، ١٢٢ ، ١٤٤
اقران (قانون ، انظر اشتراك) : ٨٥ ، ١٠٠
أقليدس : ١٧ ، تحليله لاصول الهندسة ٤٦/٤٨ ، تصور الحقيقة المشترك بينه
وبين أرسطو ٤٩ ، نقص المسلمات في هندسته ٥٠ ، مقارنة هندسته
بغيرها ٥٨ ، المسلمة الخامسة عنده ٦٧

أكسيوماتيكي (انظر نسق استنباطي ، أسس الرياضة ، اصول ، مسلمات ،
مصادرات) : ١٨ ، مباحث تأسيس الهندسة ٦٧ ، برنامج مورتر
باش الاكسيوماتيكي ٦٧/٧٠ ، اتجاهات البحوث بعده في اكسيوماتيكي
الهندسات ٧١/٧٣ ، الشروط المنطقية لتأسيس الاكسيوماتيكي ٧٦/٨٠ ،
شرط عدم التناقض ٧٦/٧٨ ، شرط الاستقلال ٧٨/٧٩ ، شرط
الاشباع ٧٩/٨٠ ، أكسيوماتيكي العدد ٢٠ ، ١٢٠/١٢١ ، اكسيوماتيكي
نظرية المجاميع ١٢٢ .

الاكسيوماتيكي (المذهب ، انظر المذهب اللوجستيقي ، المذهب الحدسي ، المذهب
الحدسي الجديد ، هبرت) : ٢١ ، ١٥٥/١٥٨
الاكسيوماتيكية (الطريقة) : عند مورتر باش وتلاميذه ٦٧/٧٣ ، ١١٧ ،
في اصلاح نقائص نظرية الأعداد اللامتناهية ١١٨ .
ألفاظ ابتدائية (انظر تصورات ابتدائية ، حدود اولية) .
ألفاظ مشتقة (انظر ألفاظ ابتدائية) ٦٩ . .
ألفاظ (الهندسات) : تجريدها من معانيها الهندسية ٦٨ ، ٧٠ ، ٧٤ ، الاقتصاد
في عددها ٧٢ .

انتماء : ٧٠

انريكس : ٦٨ ، ٧٢

انعكاس : ٦٠

انفصال (في التحليل) : ٩١

أنماط (نظرية في المذهب اللوجستيقي) : ١٢٥ .

وضاع (انظر أصول موضوع) : ٤٦/٤٥

(ب)

بادوا : ١٢١

بارمنيدس : ١١٢

باسكال : ١١٠

باش (مورتز) : مسلمات الترتيب ٥٠ ، برنامج الاكسيوماتيكي في الهندسة

١٥٦ ، ٩٩ ، ٧٠/٦٧ .

بالاس اثنيه : ١٢٦

أبيوليفي : ٧٩

برنشفيج : ٩٦

برنجشيم : ١٠٦ ، ٨٦

برهان الخلف : ٥٥

برهاني (علم : انظر أرسطو ، استنباطي ، أكسيوماتيكي) ٤٣ ، ١٥٥

برهماجيتا : ٦٤

بروور : ١٢٣ ، ١٥٩

بطليموس (فيلادلف) : ٣٩ ، ٤٠

بلترامي : ٥٨

بوانكاريه : في استحالة التوفيق بين المذاهب المختلفة في أصول الرياضة ٢١ .

١٦٢ : النقص في مسلمات اقليدس ٥٠ - ٧١ . اقترح قاموس لترجمة

اصول هندسة الى اخرى ٧٤/٧٥ ، ١٢١ ، ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٦٢ .

بول (جورج) : ١٢٨ ، ١٢٩

بول (فرديناند) : ٢٤

بولزانو : خاصية العدد اللامتناهي ١١٣ : ١١٥

بيانو : ٥٠ ، ٦٨ ، ٧٢ ، اكسيوماتيك العدد ١٢٠ / ١٢١ : ١٢٩ : ١٣٢ : ١٣٣

بير : ١٥٩

بيرس (شارل ساندرس) : ١٢٩

بيري : ٦٨ ، ٧٢

(ت)

تأصيل (من أصل عند اقليدس ، انظر أصل ، اكسيوماتيك) : ٦٧

تائري : ٩٧ ، في المنهج التكويني ٩٩

تبادل (خاصية او قانون في الجبر) : ٦٠ ، ١٠٠ ، ١٣١

تحسب (الرياضة ، انظر المذهب الحسابي) : ١٩ ، ٩٦ ، ٩٧ ، عند

الفيثاغوريين ١٠٥ / ١٠٦ ، عند المحدثين ١٠٦ / ١١٠ ، ١١٧

تحليل (علم) : ١٩ ، ٥٣

تحليل القدماء : عند ديكارت ٨٤

تحويل (اسقاطي) : ٦٠

تخلي (عدد ، انظر العدد المركب ، تحسب الرياضة) : ٩٣ ، ٩٥ / ٩٦ ، رأى

ميراي في رده الى العدد الصحيح ١٠٠ ، تخطيط كوتوراه في رده الى

العدد الصحيح ١٠٠ / ١٠٤

ترتيب (مسلمات) : ٢٤

تزيين : ٨٩

تشويه مستمر : ٦١

تصورات ابتدائية (انظر الفاظ ، حدود) : ٦٩ ، ٧٢

تضمن (في اللوجستيقا) : ١٣٢ ، ١٣٥

نطابق : ٧٢

تعريف بالتجريد : ١٤٨

تعريفات : ٤٤ ، ٤٦ ، تعريف الالفاظ المشتقة ٦٩ ، اهمية التعريفات في المذهب
اللوجستي ١٥١/١٥٢ ، اعتراضات عليها ١٥٣/١٥٤
تعويض : قاعدة في اللوجستيقا ١٤٠
تعيين المكان : ٢٦ .
تفاضل (حساب) : ٩٣
تكرار (قانون انظر توتولوجيا)
تكويني (منهج) : ٩٩
تمائل (انظر مشابهة) : ١٤٩ ، ١٥٠
تناقض (شرط عدم التناقض ، انظر اكسيوماتيك) : عند لينتز ٧٦ ، عند
هلبرت ٧٧ ، التناقض متضمن في شروط أخرى ٧٨
توتولوجيا (انظر قانون الثنائية) : ١٣٠ ، ١٣٩
تورينوس : في الحقيقة الرياضية ٦٣
توزيع (قانون في الجبر) ٨٦ ، ١٠٠ ، في المنطق ١٣١ .

(ث)

ثابت (انظر ثوابت)
ثوابت (المنطق) : ١٢٥ ، ١٣٢ ، ١٣٥ ، ١٣٨/١٣٩ .
ثنائية (قانون ، انظر توتولوجيا) : عند بول ١٣٠

(ج)

جبر (انظر تحليل القدماء ، ديوفانت ، الخوارزمي ، فيت) : عند ديوفانت
٨٣/٨٤ ، عند الهنود ٨٤ ، الجبر والمقابلة عند الخوارزمي ٨٤/٨٥ ،
عند فيت ٨٥/٨٦ ، والهندسة التحليلية ٨٧/٨٨ ، قوانين الجبر المعتاد
١٣٠

جبر المنطق : عند لينتز ١٢٧ ، ١٢٨ : عند جورج بول ٤٢ ، ١٢٨ ، ١٢٩ ،

حركة عالمية ١٢٩ . اختلاف قوانينه عن الخبر المعتاد ١٣١ . نقده
كنطق ١٣١ ١٣٢ ١٣٣

جواسمان . ٤٢ . والمكان ٦١

جوبلو : ٧٢

جوردين : ٩٠

جوس : ٥٦

جيفنز : ١٢٩

جيمس (وليم) : ٢١ ، ١٦٢

(ح)

حد (انظر ألفاظ ابتدائية ، تصورات أولية ، تعريفات) : في أصول الرياضة
٤٤ ، ٤٥ ؛ استقلال الاستنباط الرياضي عن معاني الحدود في الهندسة
٦٨ ، ٧٠ ؛ الاقتصاد في عددها ٧٢ ؛ اختيارها عسفي ٧٢ ، تجريدتها
من معانيها الهندسية ٧٤/٧٥ ، إحالتها الى فكرة الطوائف المنطقية
٧٠/٧١

حد (في التحليل) : عند كوشي ١٠٧ . عند ميراي ١٠٨ .

حد مثالي : والعدد الأصم عند ميراي ١٠٨

حدس : كمنبع للرياضة ١٤ ، ١٦ ، ٢١ ، ٦٣ ، ٦٥ ، ٩٩ تجريد الألفاظ
الهندسية من معانيها الحدسية ٧٢ ، ٧٤/٧٥ . حدس المكان والزمان عند كانط
٤٨/٤٩ ، ٦٣/٦٦ ، ٨٧ . حدس الاتصال ٩١/٩٢ . تعرضه
لنقد في التحليل ٨٩/٩٠ ، ٩٢/٩٣ . معناه عند الحدسيين ١٥٩ ،
معناه عند الحدسيين الجدد ١٦٠ ، ١٦١

حدس الاتصال (انظر حدس . دالة . اتصال هندسي) .

حدس رياضي (انظر حدس ، اتصال هندسي) .
 حدس مكاني (انظر حدس ، اتصال هندسي) : عند كانط ٦٣/٦٦ .
 حدسي هندسي (انظر حدس ، اتصال ، دالة) .
 حدسي (مذهب ، انظر المذهب الاكسيوماتيكي ، المذهب اللوجستيكي كانط) :
 ٢١ ، ١٢٣ ، ١٥٨ ، معنى الحدس عند الرياضيين ١٥٩ ، معناه عند
 الحدسيين الجدد ١٦٠/١٦١ ، نتائج المذهب الوخيمة ١٦٢ .
 حدسي جديد (مذهب ، انظر المذهب الحدسي) : ١٥٨/١٦٥
 حدسيون (انظر المذهب الحدسي)
 حدود اولية (انظر حد ، ألفاظ ابتدائية)
 حدود مشتقة (انظر حدود اولية) : ٦٩ .
 حساب : أصوله الاجتماعية ٢٩ ، عند الفيثاغوريين ٣٢ ، تخلفه عن الهندسة
 قديما ٣٣/٣٥ ، ملحق بالهندسة ٣٥ ، سيادته على الهندسة في
 العصر الحديث ٣٧ ، والجبر ٨٥ ، رد الرياضة اليه (انظر المذهب
 الحسابي) .
 حساب التكامل والتفاضل : ٨٩
 حساب الدوال : ١٤٢
 حساب العلاقات (انظر لوجستيقا) : ١٤٢
 حساب الفئات (انظر جبر المنطق ، اللوجستيقا) : ١٢٦ ، ١٤٢
 حساب القضايا الاولى (انظر لوجستيقا) : ١٣٦ ، تعريفات ثوابت المنطق
 الواردة فيه ١٣٧/١٣٨ ، حدوده ومسلماته الاولى ١٣٩ ، طريقة
 البرهان على توتولوجية قضاياها ١٤١/١٤٢
 حساب منطقي (انظر جبر المنطق ، لوجستيقا ، رياضة كلية ، أيجدية عامة عند
 لينتز) : ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٣١
 حساب هندسي : ١٣٠

حسابي (مذهب) : ١٩ . عند تانري ٩٧/٩٨ . المنهج التكويني للرياضة ابتداء
من الاعداد الصحيحة ٩٩ ، ١١٧ ، ١١٨ . رد الاعداد التحليلية الى
الاعداد الصحيحة ١٠٠/١٠٤ . رد الاعداد الصماء الى الاعداد
الصحيحة ١٠٧/١٠٩ .

حقيقة (فكرة الحقيقة في الرياضة) : كطابقة للواقع الخارجي ٦٢ ، كعدم
تناقض ٦٢ ، حقيقة باطنة وحقيقة خارجة ٦٣ ، ٦٦

(خ)

خاصية وراثية (للعدد ، انظر الاستقراء الرياضي) : ١٢١
الخوارزمي (محمد بن موسى) : اللوغارثم ٨٤ ، اكتشافه للجبر والمقابلة ٨٥

(د)

دالة (في الرياضة) : نقطة البداية في النقد الداخلي في التحليل ٨٩ ، تعريفها
عند لينتز ٩١ ، متصلة ٩٢ ، منفصلة ٩٢ ، تحليلية ٩٤

دالمبير : ١٢

دريفوس : ١٢

دور (خطأ منطقي) : ١٦١

ديدكند : ٩٩ ، مسلمة كانتور وديدكند ١٠٧ ، ونظرية القطع ١٠٧ ، ١٢١ ،
١٥٦ .

ديرشليه (لوجين) : ٩٣

ديكارت : والهندسة التحليلية ٨٧/٨٨ ، ٩٤ ، ١٠٦

ديوفانت : والجبر ٨٣/٨٤ ، ٩٦ .

(ذ)

ذاتية : ١٢٨ .

(ر)

راسل (برتراند) : رأيه في النقص في مسلمات اقليدس ٥٠ ، في نقائص العدد
اللامنتهي ١١٦ ، ١١٨ ، ١٢١ ، في الفلسفة العلمية او المذهب
اللوجستي في أسس الرياضه ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٢٧ ، ١٣٣ ، في
المنطق الرياضي ١٣٤ / ١٤٢ ، تعريفه الصوري للرياضه ١٣٥ ، في
تعريفه للعدد ١٤٨ / ١٥١ ، في الاهمية الفلسفية لتعريفاته اللوجستية
١٥١ / ١٥٢ ، تقويم لتلك التعريفات ١٥٣ / ١٥٥

رمزي (منطق ، انظر جبر المنطق ولوجستيقا) : ٦٨ ، ١٢٥ ، ١٢٧ ،
١٢٨ ، ١٣٤ ، ١٤٢ .

رند (بردية) : ٣٠

رياضه (انظر أسس ، فلسفه الرياضه)

رياضه عامه : عند لينتز ١٢٧

رياضي (منطق ، انظر منطق ، لوجستيقا) : ١٢٥ ، ١٢٧ .

ريمان : ١٣ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٨ ، ٥٩ .

رينان : ٣١

(ز)

زرميلو : ١٢٢

زمان : اصله التجريبي ٢٨ ، اصله الاجتماعي ٢٨ ، عند كانط ٦٥

زينون : ١١٢ ، ١١٣

زيوس : ١٢٦

(س)

ساكيرى : برهانه على المسلمة الخامسة الاقليدية ٥٤ / ٥٥ ، ٥٦ .

سقراط : ١١٢

سيمتريه (انظر علاقه)

(ش)

شرويدر : ١٣٩

(ص)

صفر : ليس عدداً ١٤٤/١٤٥ ، ١٥١

صوري (انظر المذهب اللوجستيقي ، المذهب الاكسيوما تيكي ، استنباط)
٦٨/٦٩

صورية بحتة : كأسم بديل للمذهب الاكسيوماتيكي ١٥٥ ، في العلم الطبيعي ١٥٧ ،
كتعميق للمذهب اللوجستيقي ١٥٨

(ض)

ضرورية (احكام الهندسة) : عند كانط ٦٣ ، ٦٥

(ط)

طائفة : ٧٠ ، ٩٤

الطريقة التكوينية (انظر تكويني)

الطريقة الأكسيوماتيكية (انظر اكسيوماتيكي)

الطوسي (نصير الدين) : ٥٤ ، ٥٥

(ع)

عاد (أو أساسي ، انظر عدد ، كانتور ، نظرية المجاميع) : ١١٤ ، ١٤٥ .

عدد (انظر اصم ، تخيلي ، لامتناهي ، منطوق ، مرتب ، عاد ، اكسيوماتيك) :

أصل العدد ٢٨ ، ٢٩ . خصائصه عند الفيثاغوريين ٣٦ ، والعدد

الأصم عندهم ٣٤ . ١٠٥/١٠٦ ، العدد التخيلي ٩٣ ، ٩٥ ، ٩٦ .

ميراي يرده الى العدد الصحيح ١٠٠/١٠٤ . رد الاصم الى الصحيح

عند كوشي ١٠٧/١٠٨ ، وعند ميراي ١٠٨ . العدد اللامتناهي .

٢٠ ، ١١١ ، خاصيته عند بولزانو ١١٣ . عند كانتور ١١٤ / ١١٥ .
اكسيوماتيك العدد ١٢٠ / ١٢١ ، ١٢٢ ؛ تعريف العدد يردده الى المنطق
عند فريجه ١٤٧ ، عند كانتور ١٤٨ ، عند راسل ١٤٩ / ١٥١ ؛
مناقشة تعريف راسل ١٥٣ / ١٥٥

عدد رباعي (نظرية) ١٣٠

عدد صحيح : ١٢٠

عدد غير قياسي (عند الفيتاغوريين ، انظر أصم)

عدد غير معقول (انظر أصم)

عدد مرتب (انظر عاد ، نظرية المجاميع) : ١١٤

عدد معقول (انظر صحيح ، منطوق)

عدد منطوق (انظر صحيح ، اصم) ١٠٤ ، ٣٤

عدد لا متناهي (انظر عدد ، نظرية المجاميع ، كانتور) : ١١١ ، ٢٠ ، خاصيته

عند بولزانو ١١٣ ، عند كانتور ١١٤ / ١١٥ ، نقائضه ١٥٥ / ١٦ .

عدم التناقض (شرط ، انظر اكسيوماتيك ، مسلمة ، هيلبرت) ٧٧ / ٧٨

علاقة سيمترية : ١٤٩

علاقة متعدية : ١٤٨ / ١٤٩

علاقات (حساب منطقي) : ١٤٢

علم برهاني (انظر برهاني ، استنباطي) : ٤٣

علم استنباطي : ٤٣

علوم متعارفة (انظر أصول موضوع) : ٤٤ ، ٤٧

عمل : ٤٨

(ف)

فايل : ٧٢ ، ١٥٩

فير : ٢٦

فروض : المقدمات كفروض ٤٩

فريجه (جوتلوب) . ١٣٢ / ١٣٣ ، ١٤٥

فلبن : ٦٨

فلسفة تاريخ : ١١

فلسفة رياضية : ١٤ ، عند ارسطو ٤٥ ، عند كانط ٦٤ / ٦٦ ، عند المحدثين

(انظر المذهب اللوجستيقي ، الاكسيوماتيكي الحدسي الجديد)

فلسفة طبيعة : ١٢

فلسفة طبيعيات : ١٢

فلسفة علمية (انظر المذهب اللوجستيقي) : ٢٠ ، ١٢٤ / ١٢٥

فلسفة علوم : ١١ / ١٢ ، ١٤ ، موضوعاتها ١٥ / ١٦

فلشتين : ١٠٣

فن : ٦٨

فورتني (بيورالي) : ١١٥ / ١١٦

فئة (انظر فئات ، طائفة) .

فيت : ٨٥ / ٨٦ ، ١٠٦

فيثاغور : ١٧ ، ٣٠ ، ٣٢ / ٣٣ ، ٣٥

فيرستراس : ٩٣ ، ٩٦ ، ٩٨

فيلاتي : ٦٨

فيلا لوس : ٣٢

(ق)

قبلي : ٦٤ ، ٦٥

قضايا ابتدائية أولية (انظر أصول ، مسلمات) : ٦٩ ، حساب القضايا

الأولية في اللوجستيقا ١٣٦ / ١٤٢

قطع (نظرية) : ١٠٨ / ١٠٩

قياس : ١٤ ، ١٣٥

قياسية (انظر هندسة)

(ك)

كانتور : نظريته في الاعداد اللامتناهية ١١٣/ ١١٧ ، ١٣٠ ، نقائص النظرية
١١٥/ ١١٦ ، تعريفه للعدد ١٤٨ ، محاولة اصلاح النظرية عند زرميلو
١٢٢ ، عند راسل بواسطة نظرية الانماط ١٢٥ .

كانط : الحقيقة الرياضية وصلتها بالمكان ٤٨/ ٤٩ ، في اسس الرياضه ٦٣/ ٦٦ ،

١٢٨ ، ١٠٩ ، ١٦٠

كروتشه : ١٢

كرونكر : ٢٥ ، ٩٦ ، ١١٩ ، ١٤٥

كشفي (الكشف في الرياضه) : ١٦٠

كلاين (فيليكس) : ٦٢ ، ٩٦

كم : ٢٤

كم مستحيل : ٩٤

كوتواره : رد العدد التخيلي الى الصحيح ١٠٠/ ١٠٤ ، ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٢٩ .

كوشي : دالة منفصلة ٩٢ ، في العدد التخيلي ٩٤ ، وفكرة الحد ١٠٨

كولنجوود : ١٢

كوليروس : ٤٠

كونت : ١١ ، ١٢

كونج : ١٢١ ، ١٢٢

(ل)

لالاند : ٤٩

لامتناهي (عدد ، انظر عدد ، كانتور) : ٢٠ ، ١١١ ، خاصيته عند بولزانو

١١٣ ، عند كانتور ١١٤/ ١١٥

لاندو : ١٢١

لغو (انظر توتولوجيا - تكرار)

لوباتشفسكي : ١٣ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٨ ، ٥٩

لوبج : ١٥٩

لوجاندر : ٥٦ : ١٠٦

لوجرانج : ٥٦

لوجستيقا : معناها قديما ١٠٥ ، ١٢٦ ، كنطق رياضي ١٢١ ، كحساب ١٣١

لوجستيقي (مذهب ، انظر المذهب الاكسيوماتيكي ، الحدسي ، الحدسي الجديد) :

٢٠ ، ٢١ ، ١١٨ . كفلسفة علمية ١٢٣ . اهداف هذه الفلسفة ١٢٥ ،

تعريفها للعدد ١٤٤ ، تقويم للمذهب ١٥٣ / ١٥٤

لوغارثم : ٨٤

لينتز : برهان المسلمات ٧١ ، عدم تناقض المسلمة عنده ٧٦ ، ٩٤ ، وجبر

المنطق ١٢٧ ، ١٢٨

(م)

ما وراء الرياضة (انظر المذهب الاكسيوماتيكي) : ١٥٦

ما وراء المنطق (انظر المذهب الاكسيوماتيكي) : ١٥٦

ماخ (ارنست) : ٢٦

ماركس (كارل) : ١١

مبادئ (أنظر أصول) : ٤٤

متجمع : ١٠٨

متحف : ٣٩

متسقة (انظر علاقة)

متغير ١٣٢ ، ١٣٥ ، ١٠٨

مجاميع (نظرية كانتور في المجاميع : انظر كانتور . العدد اللامنتهي) : ١١٤ .

١٣٠

مجموعات (نظرية ، انظر كلاين في استقصاء الهندسات الممكنة) ٦٢

مذهب اكسيوماتيكي (انظر اكسيوماتيكي)

مذهب حدسي (انظر حدسي)

مذهب حسابي (انظر حسابي)

مذهب لوجستيقي (انظر لوجستيقي)

مُرتَّب (عدد ، انظر نظرية المجاميع ، كانتور) ١١٤

مُرتَّب (في الهندسة انظر استقلال ، بوليقي)

مركب (عدد ، انظر تخيلي)

مسلمة (انظر مسلمات)

مسلمة الانتقاء : ١٢٢

مسلمة الرد : ١٢٢

مسلمة (الخامسة عند اقليدس) : ٥٤ ، ٥٦ ، استقلالها ٥٨ ، بديلها ٥٥ ،

نفيها ٥٩

مسلمة كانتور وديدكند : ١٠٧

مسلمات : ٤٤ ، ٤٧ ، ٤٨

مسلمات اسمية : ١٥٨ . شروطها المنطقية ٧٧ / ٨٠

مساواة : ٦٠

مشابهة (انظر تماثل) : ١٠٦

مصادر (انظر مسلمات ، ابن سينا ، ارسطو)

معادلة : ٦٠

مطابقة : ٦٠

مقابلة (انظر جبر ، الخوارزمي)

مقدار : ٢٤

مقدمات (انظر أصول ، مبادئ ، ابن سينا) : ٤٤

مكان : اصله الفزيولوجي ٢٦ ، الاجتماعي ٢٧ ، خصائصه ٢٨ ، الحناؤه في الهندسات ٥٨ ، ابعاده كثيرة ٦١ ، عند كانط ٦٥

مناهج العلوم : ٩ ، ١٠

منحنى (الدالة ، انظر دالة) : ٩٠

منطق الجدل : ١١ ، ١٧١

منطق رياضي (انظر لوجستيقا)

منطق صوري (انظر لوجستيقا منطق رياضي) . ١٤ ، تعريف الرياضة بثوابت المنطق عند راسل ١٣٦ ، القياس التقليدي والاستنباط في المنطق

الرياضي : ١٣٦ ، ١٣٧

منطوق (عدد) ٣٤ ، ١٠٤

منطوق النظرية (هندسة) ٤٧

منهج تكويني (انظر تكويني)

موس : ٢٨

مولدروب : ١٥٣

مولك : ٨٦

ميراي : ٩٨ ، العدد التخيلي ١٠٠ ، العدد الأصم ١٠٨

مينون : ٢٤

(ن)

نسق استنباطي : ١٦ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠

نسق فرضي استنباطي (انظر نسق استنباطي) : ٤٩ ، ٥٠ ، ٦٦

سق مقفل على نفسه : ٦٣
سق موحد (انظر المذهب اللوجستيقي) : ١٤٣ ، ١٥٢ ، ١٥٣
سق بقيي استناطي . ٤٩
نقائض الرياضة ١١٥/١١٦ ، علاجها ١٢٢ ، ١٦٠
نقائض المنطق الرياضي ١٥٣/١٥٤
نقد باطني : تعريفه : ٥٤ . في الطبيعات ١٢/١٣ ، في الهندسة ٥٤/٦٢ ، في
التحليل ٩٠/٩٤
نقد ذاتي (انظر نقد باطني)
نقلة (مسلمات) : ٥٠
نيكود : ٧٢
نيوتن : ١٢ ، ٦٥

(ه)

هادامار : ٩٥/٩٦ ، ١١٠
هالشتد : ٥٦ ، ٦٨
هاملتون (رومان) : ١٣٠
هاوسدورف : ١٢٢ ، ١٥٣
هاينكل : ١٢٢ ، ١٤٥
هرقليط : ١١٢
هرميت : ٢٥
هلبرت : (انظر المذهب الأكسيوماتيكي) : ٧٢،٥٠ . الشروط المنطقية
للأكسيوماتيك ٧٦/٨٠،١١٨،١٢١،١٦٢ . مذهبه الأكسيوماتيكي
١٥٨/١٥٥ .

هنتجتون : ١٢١ .

هندسة : عند القدماء ٣٠ ، غير أقليدية ٥٥ ، ٥٤ ، ٤٩ ، غير قياسية ٦٠ ،
اسقاطية ٦٠ ، ٧٢ ، الوضع ٤٢ ، ٦٠ ، وصفية ٧٢ ،
كيفية ٦٠ ، الحقيقة في الهندسة ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٦ ، أكسيوماتيك
الهندسة ٧١/٧٣ ، شروط الأكسيوماتيك ٧٦/٨٠ .

هوايتهد : ١١٨ ، ١٣٣ .

هيتنج : ١٥٩ .

هيجل : ١١ .

هيرودوت : ٣٠ .

(و)

واحسد : مساوق للموجود وليس عدداً عند ارسطو ١٤٤ ، تعريفه عند راسل
١٥١ ، ١٥٣ ، ١٥٤ .

فهرس المصطلحات والاعلام^(١)

باللغات الاوروبية

A

Algebra (Algèbre)	الجبر
Algebra of logic	جبر المنطق
Algèbre de logique	جبر المنطق
Algorithme	لوغاريتم
Analyse	التحليل (علم)
Analyse des anciens	تحليل القدماء
Analysis	مجلة
Appartenance	اشتمال ، انتماء
Apriori	قبلي
Arbitraire	عسفي ، تحكمي
ARISTOTE	أرسطو
Arithmetisation of	تحسيب الرياضه
mathematics	(رد الرياضه الى الاعداد)
Axiomatique	اكسيو ماتيك ، مباحث الاصول

((الاعلام بالحروف الكبره .

Axiome	أصل موضوع ، علوم متعارفة، مسلمة .
Axiome d'ordre	مسلمات أو أصول خاصة بالترتيب
Axiome de reductibilité	مسلمة الرد أو الارجاع
Axiome de selection	مسلمة الانتقاء

B.

BAIRE	بيسر
BELTRAMI	بلترامي
BOLL, Ferdinand	بول (فرديناند)
BOLZANO	بولزانو
BOOLE, George	بول (جورج)
BRAHMAGUPTA	براهما جوبتا
BRUNSCHVIG	برنشفيج

C.

Calcul	حساب
CANTOR	كانتور
Caracteristique universelle	أبجدية عامة
Cardinal number	عدد عاد أو أساسي
Class	طائفة أو فئة
COLERUS	كوليروس
COLLINGWOOD	كولنجوود
Commutation	تبادل المواضع
Complex number	عدد مركب
COMTE	كونت
Concepts dérivés	تصورات مشتقة (بالتحريف)

Concepts primitifs	تصورات ابتدائية
Congruence	مطابقة
Constant	ثابت - مستمر
Construction	انشاء ، عمل
Continu	متصل
Continuité géométrique	اتصال هندسي
Continuous deformation	تشويه مستمر
Continuum	اتصال
Convergente	متجمع
Coordinates	الاحداثيات
Courbe	منحنى الدالة
COUTURAT	كوتوراه
CROCE	كروتشي
Curve	منحنى الدالة

D

D'ALEMBERT	دالامبير
DEDEKIND	ديدكند
Deductive science	علم استنباطي
Deductive system	نسق استنباطي
Definition by abstraction	تعريف بالتجريد
Demonstrative science	علم برهاني
Deplacement	نقلة
DESCARTES	ديكارت
Differentiation	تفاضل (حساب)
DILTEY	دلتسي
DIOPHANTE	ديوفانت
DIRICHELET, Lejeune	ديرشليه (لوجين)
Discontinuité	انفصال
Discontinuous function	دالة منفصلة
Doctrine arithmetisante	المذهب الحسابي

DRYFUS
DURKHEIM

دريفوس
دوركيم

E.

Elementary calculus of propositions
Elements
Enoncé
ENRIQUES
Entier
Equality
Equivalence
Erkenntnis
EUCLIDE

حساب القضايا الأولية
الاصول
منطوق
انريكس
العدد الصحيح
مساواة
معادلة
مجلة علمية
أقليدس

F.

Finite number
Fonction
Fonction analytique
Formal
Formalism
Foundation of mathematics
Function

العدد المنتهي
دالة
دالة تحليلية
صوري
صورية
أسس الرياضيات ، أصولها
دالة

G.

GAUSS
Géométrie analytique
Geometry of situation
GOBLOT
GRASSMANN

جوس
هندسة تحليلية
هندسة الوضع
جوبلو
جراسمان

H.

HADAMARD	هادامار
HAENKEL	هاينكل
HALSTED	هالشند
HAMILTON, Rowan	هاملتون (روان)
HANTIGTON	منتجتون
HAUSSDORFF	هاوسدورف
HEGEL	هيجل
HERMITE	هرميت
HILBERT	هلبيرت
Homogène	متجانس
Hypothèse	فرض

I.

Identite	ذاتية ، هوية
Imaginary number	عدد تخيلي
Implication	تضمن
Inclusion	احتواء
Incommensurables	الاعداد أو الابعاد غير المتقايسة
Independence	استقلال
Independance ordonnée	استقلال مرتب
Induction mathématique	استقراء رياضي
Induction par reccurence	استقراء بالتكرار
Infini	لامتناهي
Infinite number	عدد غير متناهي
Integer	عدد صحيح
Integration	تكامل (حساب)
Intuition	حدس ، بدهة
Intuition empirique	حدس تجريبي

Intuition spaciare
Intuitionism
Irrational number
Isomorphe

حدس مكاني
المذهب الحدسي
العدد الاصح
لا كيف له

J.

JAMES, W.
JEVONS
JOURDAIN, Ph.

جيمس (وليم)
جيفنز
جوردين (فيليب)

K.

KANT
KLEENE
KLEIN, F.
KONIG
KRONECKER

كانط
كلين
كلاين (فيليكس)
كونج
كرونكر

L.

LAGRANGE
LALANDE
LANDEAU
Law of association
Law of distribution
Law of duality
LEBESGUE
LEGENDRE
Relation

لاجرانج
لالاند
لاندو
قانون الاشتراك او الاقتران
قانون التوزيع
قانون الثنائية
لوبيج
لوجاندر
علاقة

LEVI, Beppo	ليفى (بيو)
Limite	حد
LOBATCHEVSKI	لوباتشفسكى
Localisation	تعيين المكان
Logistic	لوجستيقا أو المنطق الرياضي
Logistic theory	المذهب أو النظرية اللوجستيقية
Logistica numerosa	حساب الاعداد
Logistica speciosa	حساب الحروف (الجبر)
Logistique	لوجستيقا

M.

MARX	ماركس
Methemathical logic	المنطق الرياضي
Mathématique universelle	الرياضة العامة
MAUSS	موس
MENON	مينون
MERAY	ميراي
Mesure	قياس
Metalogic	ما وراء المنطق
Metamathematics	ما وراء الرياضة
Metrical geometry	هندسة قياسية
Méthode génétique	طريقة تكوينية أو توليدية
Methodology	علم مناهج العلوم
MOLDERUP	مولدروب

N.

NEWTON	نيوتن
NICOD	نيكود

Nominalists	اسميون
Non-euclidian geometries	هندسات غير اقليدية
Non-metrical geometries	هندسات غير قياسية
Neo-intuitionism	المذهب الحدسي الجديد

O.

Order	نظام ، ترتيب
Ordinal	عدد مرتب
Ordre	نظام ، ترتيب

P.

PADOA	بادوا
PASCH	باش
PEANO	بيانو
PEIRCE, Ch. S.	بيرس (شارل ساندرس)
Permutation	تبادل المواضع
PIERI	بييري
PLATON	أفلاطون
Philosophy of natural sciences	فلسفة العلوم الطبيعية
Philosophy of physical sciences	فلسفة علوم الطبيعة
Philosophy of sciences	فلسفة العلوم
PHYTAGORE	فيثاغور
POINCARÉ	بوانكاريه
Postulat	مسلمة ، مصادرة
Postulat implicit	مسلمة مضمرة
Postulational system	نسق المسلمات
Projective geometry	هندسة إسقاطية
Projective transformation	تحويل إسقاطي

Proposition
Powers
Puissances
Pure Formalism

قضيه
قوى ، أسس
قوى ، أسس
صوريه بحثه أو خالصه

Q.

Qualitative geometry
Quantité impossible
Quaternions

هندسه كيفيه
كم مستحيل
الاعداد الرباعيه

R.

Reflexion
RHIND
REIMANN
RENAN
Rotation
RUSSELL

انعكاس
رئه
ريمان
رينان
استدارة ، دوران
راسل

S.

SACCHERI
SCHRODER
Signs
Space
Symbolic
Symbolic logic
Synthèse
Système catégorico — déductif
Système hypothético — déductif

ساكيري
شرويدر
علامات
مكان
رمزي
منطق رمزي
تركيب
نسق يقيني استنباطي
نسق فرضي استنباطي

II.

TANNHART, J.	تالزوي
TAUCHENPAUS	تورينوس
Tautology	توتولوجيا ((قانون المنطق))
Théorème	نظرية
Théoria	مبجلة
Théorie des ensembles	نظرية المجموع
Theory of cut	نظرية القطع
Theory of functions	نظرية الدوال
Theory of groups	نظرية المجموعات
Theory of limit	نظرية الحد
Theory of set	نظرية المجموع
Time	الزمن
Transfinite number	العدد غير المنتهى ، الامتلاحي
Transformation	تحويل

W.

WALLACE	فيلاني
Wartable	متغير
Warrant	متغير
Wattair Dittre	متجه حر
WELDEN	فيلين
WENEN	فيلين
Wentéexterne	حقيقة خارجية
Wentéinterne	حقيقة بالطة
WELDE	فيلين

W.

WEBER
WEIERSTRASS
WELSTEIN
WEYL

فبر
فیرستراس
فلشتین
فایل

Z.

ZENON
ZEUTHAN

زینون
تزیتن

فهرس الفصول

الصفحات

المقدمة

الفصل الأول : تمهيد في فلسفة العلوم ٢١ — ٩

- (١) الصلة بين العلوم والفلسفة ١١ — ٩
(٢) حركات النقد الذاتي في العلوم وفلسفة العلوم ١٦ — ١١
(٣) المنهج الذي اتبعناه في عرض فلسفة الرياضة ٢١ — ١٧

الفصل الثاني : موضوعات الرياضة ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديماً ٣٧ — ٢٣

- (٤) التعريف التقليدي للرياضة بموضوعاتها ٢٥ — ٢٣
(٥) الأصول الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتي المكان والعدد ٢٩ — ٢٥
او للهندسة والحساب .
(٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين ٣٧ — ٣٠

الفصل الثالث : تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم في سبيل تأسيس علم رياضي وثيق ٥١ — ٣٩

- (٧) لا بديل للرياضة عن منهجها ٤١ — ٣٩
(٨) تعريف الرياضة بمنهجها ٤٣ — ٤١

الصفحات

- (٩) تحليل ارسطو لأسس الهندسة وتطبيق أقليدس لهذا . . . ٤٣ - ٥١
التحليل في إقامة نسق إستنباطي للهندسة .

الفصل الرابع : من النقط الداخلي في الهندسة الى الأكسيوماتيك الحديث ٥٣ - ٨١

- (١٠) حركة النقد الذاتي في الهندسة ونشأة هندسات كثيرة في ٥٣ - ٦٣
القرن التاسع عشر .
(١١) معنى الحقيقة الرياضية الجديد ضد نظرية كانط . . . ٦٣ - ٦٦
في أسس الرياضة
(١٢) حركة تأسيس المسلمات في الهندسة (الأكسيوماتيك) ٦٦ - ٧٤
تبتعد عن الحدس وتلتقي بالمنطق الصوري .
(١٣) اقتراح هنري بوانكاريه يؤكد مدى ابتعاد مسلمات ٧٤ - ٧٥
الهندسة عن الحدوس والأشكال .
(١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات عند الرياضيين . . ٧٥ - ٨١
المعاصرين .

الفصل الخامس : تحسب الرياضة واكسيوماتيك العدد ٨٣ - ١٢٢


- (١٥) الجبر والهندسة التحليلية ٨٣ - ٩٠
(١٦) النقد الباطني في التحليل ينتهي إلى نبذ فكرة الاتصال ٩٠ - ٩٤
الهندسي ويستعوض عنها بالأعداد .
(١٧) دور الأعداد التخيلية في تحسب الرياضة ٩٤ - ٩٧
(١٨) برنامج المذهب الحسابي ومثال رد الأعداد التخيلية ٩٧ - ١٠٤
إلى الأعداد الصحيحة .

الصفحات

- (١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة ١٠٤ - ١١٠
(٢٠) نظرية الأعداد اللامتتهية دعم للمذهب الحسابي ١١٧ - ١١٠
(٢١) أكسيوماتيك العدد ١٢٢ - ١١٧

الفصل السادس : المذاهب المعاصرة في أسس الرياضيات ١٢٣ - ١٦٢

- (٢٢) معنى المذهب اللوجستيقي ١٢٦ - ١٢٣
(٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضي ١٣٤ - ١٢٦
(٢٤) عرض لحساب القضايا الأولية في اللوجستيقيا ١٤٢ - ١٣٤
(٢٥) اشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق ١٥٥ - ١٤٢
(٢٦) المذهب الأكسيوماتيكي ١٥٨ - ١٥٥
(٢٧) المذهب الحدسي والمذهب الحدسي الجديد ١٦٢ - ١٥٩
- مراجع مختارة ١٦٤ - ١٦٣
- فهرس المصطلحات العربية والأعلام ١٨٣ - ١٦٥
- فهرس المصطلحات والأعلام باللغات الأوروبية ١٩٤ - ١٨٤

 Bibliotheca Alexandrina



0347649